Окружности-3. Прямые углы и вписанные четырехугольники.

1. На гипотенузе прямоугольного треугольника построен квадрат во внешнюю сторону. Найдите на какие углы делит отрезок, соединяющий вершину прямого угла и центр квадрата, прямой угол.

2. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка P. Пусть P_C и P_B —проекции точки P на прямые AB, AC соответственно. Докажите, что точки B, C, P_B, P_C лежат на одной окружности.

3. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведен перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P- основания перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB.

4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD, а на отрезках AD и AC взяты точки E и F такие, что $CD = ED$ и EF перпендикулярно AB. Найдите угол CBF.

5. Из точки A, расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q. Пусть L — середина PQ. Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.

6. **Теорема Симсона.** На описанной окружности треугольника ABC отметили точку P. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника, лежат на одной прямой.

7. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$. Пусть X — основание перпендикуляра, опущенного из B на AO, M — середина BC, AA_1 — высота треугольника ABC. Докажите, что $XM = MA_1$.

8. В остроугольном треугольнике ABC на продолжениях высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 отметили точки B_2 и C_2 соответственно. Оказалось, что $\angle B_2AC_2 = 90^o$. Из точки A опустили перпендикуляр AX на B_2C_2. Докажите, что $\angle BXC = 90^o$.

Домашнее задание

1. Из произвольной точки K на диагонали параллелограмма опущены перпендикуляры на стороны (или их продолжения). Докажите, что получившийся четырехугольник является трапецией, если K не является точкой пересечения диагоналей.

2. Из произвольной точки M, лежащей внутри данного угла с вершиной A, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

Окружности-3. Прямые углы и вписанные четырехугольники.

1. На гипотенузе прямоугольного треугольника построен квадрат во внешнюю сторону. Найдите на какие углы делит отрезок, соединяющий вершину прямого угла и центр квадрата, прямой угол.

2. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка P. Пусть P_C и P_B —проекции точки P на прямые AB, AC соответственно. Докажите, что точки B, C, P_B, P_C лежат на одной окружности.

3. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведен перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P- основания перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB.

4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD, а на отрезках AD и AC взяты точки E и F такие, что $CD = ED$ и EF перпендикулярно AB. Найдите угол CBF.

5. Из точки A, расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q. Пусть L — середина PQ. Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.

6. **Теорема Симсона.** На описанной окружности треугольника ABC отметили точку P. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника, лежат на одной прямой.

7. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$. Пусть X — основание перпендикуляра, опущенного из B на AO, M — середина BC, AA_1 — высота треугольника ABC. Докажите, что $XM = MA_1$.

8. В остроугольном треугольнике ABC на продолжениях высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 отметили точки B_2 и C_2 соответственно. Оказалось, что $\angle B_2AC_2 = 90^o$. Из точки A опустили перпендикуляр AX на B_2C_2. Докажите, что $\angle BXC = 90^o$.

Домашнее задание

1. Из произвольной точки K на диагонали параллелограмма опущены перпендикуляры на стороны (или их продолжения). Докажите, что получившийся четырехугольник является трапецией, если K не является точкой пересечения диагоналей.

2. Из произвольной точки M, лежащей внутри данного угла с вершиной A, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.