

Конструктивы в геометрии-1.

1. Существуют ли на плоскости 4 точки такие, что попарные расстояния между ними равны 5,5,5,6,8,10?
2. Приведите пример какого-нибудь треугольника, у которого две медианы перпендикулярны друг другу.
3. На плоскости отмечены несколько (больше трех) точек. Известно, что если выкинуть любую точку, то оставшиеся будут симметричны относительно какой-нибудь прямой. Верно ли, что все множество точек тоже симметрично относительно какой-нибудь прямой?
4. Точку Т внутри треугольника назовем рациональной, если все углы треугольников АВТ, СВТ, АСТ рациональны. Докажите, что если в остроугольном треугольнике есть рациональная точка, то таких точек не менее трех.
5. а) Приведите пример треугольника, все стороны и высоты которого измеряются целым числом сантиметров.
б) Могут ли в остроугольном треугольнике все стороны и все высоты измеряться целым числом сантиметров?
6. Существует ли клетчатый многоугольник, который можно поделить на две равные части разрезом такой формы? Разрез должен лежать внутри многоугольника (на границу могут выходить только концы разреза).
7. Один четырехугольник помещается внутри другого. Может ли быть сумма диагоналей внутреннего четырехугольника быть больше суммы диагоналей внешнего?
8. Список упорядоченных в порядке возрастания длин сторон и диагоналей выпуклого четырехугольника, совпадает с таким же списком для другого четырехугольника. Обязательно ли эти четырехугольники равны?
9. Существует ли такой выпуклый пятиугольник, от которого некоторая прямая отрезает подобный ему пятиугольник?
10. а) Существует ли выпуклый многоугольник без равных сторон, который можно разрезать на два равных многоугольника?
б) Существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении 2 : 1?
11. Существуют ли на плоскости три такие точки А, В и С, что для любой точки Х длина хотя бы одного из отрезков ХА, ХВ и ХС иррациональна?
12. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если центр его вписанной окружности одинаково удалён от середин двух сторон?



Конструктивы в геометрии-2.

1. Верно ли, что любой треугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника?
2. Две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника. Треугольники подобны. Обязательно ли эти треугольники равны?
3. Даны четыре палочки. Оказалось, что из любых трёх из них можно сложить треугольник, при этом площади всех четырёх треугольников равны. Обязательно ли все палочки одинаковой длины?
4. Из четырёх одинаковых треугольников сложен выпуклый четырёхугольник. Верно ли, что у этого четырёхугольника обязательно есть параллельные стороны?
5. Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1м²?
6. Пусть $n > 3$. Существуют ли n точек, не лежащих на одной прямой, попарные расстояния между которыми иррациональны, а площади всех треугольников с вершинами в них рациональны?
7. Могут ли быть два пятиугольника так, чтобы у них были одни и те же вершины, но не было ни одной общей стороны?
8. Можно ли любой треугольник разбить на 22 треугольника, в каждом из которых есть угол 22° и ещё 23 треугольника, в каждом из которых есть угол 23°?
9. Каждая из диагоналей разбивает четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Обязательно ли диагонали перпендикулярны?
10. На плоскости расположено несколько непересекающихся отрезков. Всегда ли можно соединить концы некоторых из них отрезками так, чтобы получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная?
11. Может ли конечный набор точек содержать для каждой своей точки ровно 100 точек, удалённых от неё на расстояние 1?
12. На бесконечном листе клетчатой бумаги (размер клетки 1×1) укладываются кости домино размером 1×2 так, что они накрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы любая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала лишь конечное число костей?
13. В остроугольном треугольнике АВС проведены медиана АМ, биссектриса ВК и высота СН. Может ли площадь треугольника, образованного точками пересечения этих отрезков, быть больше $0,499S_{ABC}$?