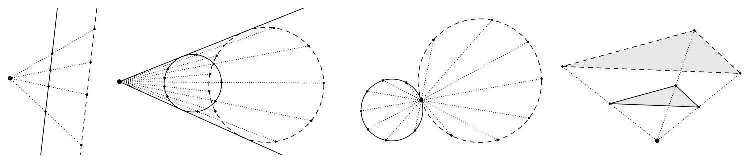
Гомотетия

Гомотетией с центром в точке O и ненулевым коэффициэнтом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.



0. а) Докажите, что при гомотетии отрезок переходит в отрезок, луч — в луч, прямая — в прямую.
б) Докажите, что если прямая проходит через центр гомотетии, то она переходит в себя; если же прямая не проходит через центр гомотетии, то она переходит в параллельную прямую.
в) Докажите, что гомотетия сохраняет углы.
г) Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.

1. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата образуют квадрат.

2. Через середины сторон треугольника проведены прямые, соответственно параллельные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

3. а) Найдите геометрическое место середин хорд, одним из концов которых является данная точка окружности A.
б) В окружности ω проведена хорда AB. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC где $C \in \omega$.
в) Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что их точки пересечения медиан образуют параллелограмм.

4. *Лемма Архимеда* В окружности ω проведена хорда AB. Окружность γ касается AB в точке K и окружности ω в точке T внутренним образом. L — середина дуги AB окружности ω, не содержащей точки T. Докажите, что точки K, T и L лежат на одной прямой .

5. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

6. Внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b, нарисованы две окружности ω_a и ω_b, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, ω_a касается a в точке A; ω_b касается b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

7. а) Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AC треугольника ABC через P и Q соответственно. Докажите, что прямая BQ проходит через точку диаметрально противоположную точке P на вписанной окружности.
б) Через середину M стороны BC неравнобедренного треугольника ABC проведена касательная к его вписанной окружности, отличная от BC, точка касания обозначена через Y. Докажите, что прямая AY проходит через точку касания вневписанной окружности с отрезком BC.

8. В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаютсяв точке M, высоты AA_1, BB_1, CC_1, пересекаются в точке H, а точка O - центр описанной окружности.
а) *Окружность Эйлера.* Докажите, что точки $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$, а также середины отрезков AH, BH, CH лежат на одной окружности, радиус которой вдвое меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC.
б) *Прямая Эйлера.* Докажите, что точки H, O, M и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой и найдите отношения, в котором последние две точки делят отрезок OH.

9. а) Окружности ω и ω_A — вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A.
б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про точки касания вневписанных окружностей ω_B, ω_C с прямой BC.

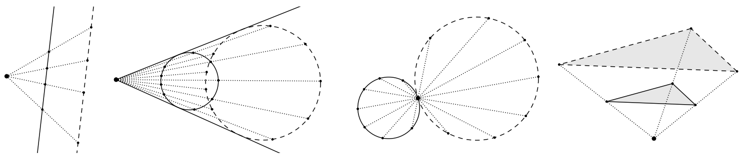
10. В треугольник ABC напротив вершин B и C вневписаны окружности ω_B и ω_C. Докажите, что прямые, соединяющие центры ω_B и ω_C с точками касания ω_C и ω_B с прямой BC соответственно, пересекаются на высоте треугольника, выходящей из вершины A.

11. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A, тоже равны.

12. Докажите, что любой выпуклый многоугольник M содержит два непересекающихся во внутренних точках многоугольника M_1и M_2 подобных Mс коэффициентом $\frac{1}{2}$

Гомотетия

Гомотетией с центром в точке O и ненулевым коэффициэнтом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.



0. а) Докажите, что при гомотетии отрезок переходит в отрезок, луч — в луч, прямая — в прямую.
   б) Докажите, что если прямая проходит через центр гомотетии, то она переходит в себя; если же прямая не проходит через центр гомотетии, то она переходит в параллельную прямую.
   в) Докажите, что гомотетия сохраняет углы.
   г) Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.

1. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата образуют квадрат.

2. Через середины сторон треугольника проведены прямые, соответственно параллельные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

3. а) Найдите геометрическое место середин хорд, одним из концов которых является данная точка окружности A.
   б) В окружности ω проведена хорда AB. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC где $C \in \omega$.
   в) Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что их точки пересечения медиан образуют параллелограмм.

4. *Лемма Архимеда* В окружности ω проведена хорда AB. Окружность γ касается AB в точке K и окружности ω в точке T внутренним образом. L — середина дуги AB окружности ω, не содержащей точки T. Докажите, что точки K, T и L лежат на одной прямой .

5. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

6. Внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b, нарисованы две окружности ω_a и ω_b, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, ω_a касается a в точке A; ω_b касается b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

7. а) Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AC треугольника ABC через P и Q соответственно. Докажите, что прямая BQ проходит через точку диаметрально противоположную точке P на вписанной окружности.
   б) Через середину M стороны BC неравнобедренного треугольника ABC проведена касательная к его вписанной окружности, отличная от BC, точка касания обозначена через Y. Докажите, что прямая AY проходит через точку касания вневписанной окружности с отрезком BC.

8. В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаютсяв точке M, высоты AA_1, BB_1, CC_1, пересекаются в точке H, а точка O - центр описанной окружности.
   а) *Окружность Эйлера.* Докажите, что точки $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$, а также середины отрезков AH, BH, CH лежат на одной окружности, радиус которой вдвое меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC.
   б) *Прямая Эйлера.* Докажите, что точки H, O, M и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой и найдите отношения, в котором последние две точки делят отрезок OH.

9. а) Окружности ω и ω_A — вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A.
   б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про точки касания вневписанных окружностей ω_B, ω_C с прямой BC.

10. В треугольник ABC напротив вершин B и C вневписаны окружности ω_B и ω_C. Докажите, что прямые, соединяющие центры ω_B и ω_C с точками касания ω_C и ω_B с прямой BC соответственно, пересекаются на высоте треугольника, выходящей из вершины A.

11. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A, тоже равны.

12. Докажите, что любой выпуклый многоугольник M содержит два непересекающихся во внутренних точках многоугольника M_1и M_2 подобных Mс коэффициентом $\frac{1}{2}$