Геометрический разнобой

1. (2) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30°$, то $AK = BC$.

2. (2) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

3. (2) Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC?. Прямая, проходящая через точку C? параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка C?P.

4. (2) Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая l_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая l_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые l_1 и l_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных l_1 и l_2.

5. (3) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

6. (3) Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

7. (3) Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB, BC в точках B_1, B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1, C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольника BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

Геометрический разнобой

1. (2) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30°$, то $AK = BC$.

2. (2) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

3. (2) Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC?. Прямая, проходящая через точку C? параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка C?P.

4. (2) Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая l_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая l_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые l_1 и l_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных l_1 и l_2.

5. (3) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

6. (3) Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

7. (3) Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB, BC в точках B_1, B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1, C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольника BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.