

Двудольные графы.

Определение. Граф называется двудольным, если его вершины можно раскрасить в два цвета правильным образом, т.е. так, чтобы две соединенные ребром вершины были покрашены в разные цвета.

1. Пусть Γ — двудольный граф с чёрными и белыми вершинами. Докажите, что
 - а) Если в Γ есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
 - б) Если в Γ есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа чёрных вершин не более, чем на 1.
2. Докажите, что в двудольном графе сумма степеней вершин одного цвета равна сумме степеней вершин другого цвета.
3. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?
4. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

. Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, . . . , на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?
5. $2n$ футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие n команд, что никакие две из них не играли друг с другом.
6. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов.
7. Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе с
 - а) $2n$ вершинами;
 - б) $2n + 1$ вершиной?
8. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2017×2017 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
9. 8 школьников решало 8 задач. Известно, что каждую задачу решило 5 человек. Докажите, что найдутся такие 2 ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них.
10. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?
Домашнее задание
11. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир в крестики-нолики на доске 3×3 . Каждый сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью- 1 очко, за проигрыш- 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. На сколько игр, в которых девочка выиграла у мальчика, больше, чем игр, в которых мальчик выиграл у девочки.

Двудольные графы.

Определение. Граф называется двудольным, если его вершины можно раскрасить в два цвета правильным образом, т.е. так, чтобы две соединенные ребром вершины были покрашены в разные цвета.

1. Пусть Γ — двудольный граф с чёрными и белыми вершинами. Докажите, что
 - а) Если в Γ есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
 - б) Если в Γ есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа чёрных вершин не более, чем на 1.
2. Докажите, что в двудольном графе сумма степеней вершин одного цвета равна сумме степеней вершин другого цвета.
3. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?
4. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

. Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, . . . , на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?
5. $2n$ футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие n команд, что никакие две из них не играли друг с другом.
6. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов.
7. Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе с
 - а) $2n$ вершинами;
 - б) $2n + 1$ вершиной?
8. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2017×2017 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
9. 8 школьников решало 8 задач. Известно, что каждую задачу решило 5 человек. Докажите, что найдутся такие 2 ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них.
10. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?
Домашнее задание
11. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир в крестики-нолики на доске 3×3 . Каждый сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью- 1 очко, за проигрыш- 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. На сколько игр, в которых девочка выиграла у мальчика, больше, чем игр, в которых мальчик выиграл у девочки.