

## Триангуляции.

*Определение.* Триангуляцией многоугольника называют его разбиение на треугольники, обладающее тем свойством, что эти треугольники либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек (т.е. вершина одного треугольника не может лежать на стороне другого).

- а) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники.  
б) Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что есть хотя бы 2 вершины, из которых не выходит ни одной диагонали.
- а) Пусть многоугольник триангулирован. Сопоставим триангуляции такой граф: каждая вершина соответствует одному из треугольников, а вершины соединены, если треугольники имели общее ребро. Докажите, что данный граф является деревом.  
б) Докажите, что треугольники триангуляции можно раскрасить в два цвета так, что имеющие общую сторону треугольники будут разного цвета.  
в) Докажите, что если треугольников, у которых 2 стороны являются сторонами многоугольника, будет  $x$ , а количества диагональных треугольников  $y$ , то  $x=y+2$ .
- Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в 2 цвета и многоугольник триангулирован, причем все диагонали являются разноцветными. Могут ли в нем быть диагональные треугольники? Как выглядит его граф триангуляции?
- На доске начертили многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, непересекающихся внутри него, так, что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, которые к ней примыкают, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?
- Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.
- Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
- Выпуклый  $2019$ -угольник разбит диагоналями на треугольники (при этом диагонали не пересекаются внутри многоугольника). Треугольники раскрашены в черный и белый цвета так, что каждые два треугольника с общей стороной раскрашены в разные цвета. Найдите наибольшее возможное значение разности количества белых и черных треугольников.
- На доске нарисован выпуклый  $n$ -угольник ( $n>3$ ). Каждую его вершину надо окрасить либо в черный, либо в белый цвет. Назовем диагональ разноцветной, если ее концы окрашены в разные цвета. Раскраску назовем хорошей, если  $n$ -угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

## Триангуляции.

*Определение.* Триангуляцией многоугольника называют его разбиение на треугольники, обладающее тем свойством, что эти треугольники либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек (т.е. вершина одного треугольника не может лежать на стороне другого).

- а) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники.  
б) Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что есть хотя бы 2 вершины, из которых не выходит ни одной диагонали.
- а) Пусть многоугольник триангулирован. Сопоставим триангуляции такой граф: каждая вершина соответствует одному из треугольников, а вершины соединены, если треугольники имели общее ребро. Докажите, что данный граф является деревом.  
б) Докажите, что треугольники триангуляции можно раскрасить в два цвета так, что имеющие общую сторону треугольники будут разного цвета.  
в) Докажите, что если треугольников, у которых 2 стороны являются сторонами многоугольника, будет  $x$ , а количества диагональных треугольников  $y$ , то  $x=y+2$ .
- Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в 2 цвета и многоугольник триангулирован, причем все диагонали являются разноцветными. Могут ли в нем быть диагональные треугольники? Как выглядит его граф триангуляции?
- На доске начертили многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, непересекающихся внутри него, так, что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, которые к ней примыкают, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?
- Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.
- Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
- Выпуклый  $2019$ -угольник разбит диагоналями на треугольники (при этом диагонали не пересекаются внутри многоугольника). Треугольники раскрашены в черный и белый цвета так, что каждые два треугольника с общей стороной раскрашены в разные цвета. Найдите наибольшее возможное значение разности количества белых и черных треугольников.
- На доске нарисован выпуклый  $n$ -угольник ( $n>3$ ). Каждую его вершину надо окрасить либо в черный, либо в белый цвет. Назовем диагональ разноцветной, если ее концы окрашены в разные цвета. Раскраску назовем хорошей, если  $n$ -угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.