Многочлены. Можно или нельзя?

1. Докажите, что если многочлен степени n принимает рациональные значения в $n+1$ рациональной точке, то его коэффициенты рациональны.

2. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1, P(2) = 2$ и $P(n)$ — иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

3. Верно ли, что при непрерывном изменении одного из коэффициентов кубического уравнения его наименьший корень также изменяется непрерывно?

4. Существует ли такой приведённый многочлен $P(x)$ степени 3, что $P(1000) = 1, P(1001) = 3,$ $P(1002) = 17, P(1003) = 55$?

5. Приведенный квадратный трехчлен $P(x)$ имеет 2 различных корня. Могло ли оказаться так, что $P(P(x))$ имеет 3 различных корня, а $P(P(P(x))) = 0$ имеет 7 различных корней?

6. Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

7. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)...P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

Многочлены. Можно или нельзя?

1. Докажите, что если многочлен степени n принимает рациональные значения в $n+1$ рациональной точке, то его коэффициенты рациональны.

2. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1, P(2) = 2$ и $P(n)$ — иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

3. Верно ли, что при непрерывном изменении одного из коэффициентов кубического уравнения его наименьший корень также изменяется непрерывно?

4. Существует ли такой приведённый многочлен $P(x)$ степени 3, что $P(1000) = 1, P(1001) = 3,$ $P(1002) = 17, P(1003) = 55$?

5. Приведенный квадратный трехчлен $P(x)$ имеет 2 различных корня. Могло ли оказаться так, что $P(P(x))$ имеет 3 различных корня, а $P(P(P(x))) = 0$ имеет 7 различных корней?

6. Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

7. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)...P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?