Теорема Виета и квадратный трехчлен

Теорема Виета. Пусть многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - его корни. Тогда выполняется следующее:

$$\begin{cases} -\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ \ldots \\ (-1)^n\frac{a_0}{a_n} = x_1x_2\ldots x_n \end{cases}$$

1. а)Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ — составное.
   б) Многочлен $f(x) = x^2 + ax + b + 1$ с целыми коэффициентами имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ составное.
2. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $\frac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трехчлена $f(x)$ имеют разные знаки.
3. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - m)x - m + 2 = 0$ наименьшая?
4. Может ли
   а) $x^2 + bx + c$
   б) $ax^2 + bx + c$
   иметь рациональные корни, если его коэффиценты нечетны?
5. Найдите все такие пары квадратных трёхчленов x^2+ax+b, x^2+cx+d, что a и b — корни второго трёхчлена, c и d — корни первого.
6. Пусть a, b, c - различные числа, не равные 0. Доказать, что если уравнения $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2+bx+ac = 0$ имеют общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2 + cx + ab = 0$.
7. Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q.
8. Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите стёртое число.
9. Сто а)последовательных б) последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2+a_kx+b_k = 0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?

Теорема Виета-2. Многочлены высших степеней.

Теорема Виета. Пусть многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - его корни. Тогда выполняется следующее:

$$\begin{cases} -\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ \ldots \\ (-1)^n\frac{a_0}{a_n} = x_1x_2\ldots x_n \end{cases}$$

1. Найти коэффициенты p и q уравнения $x^4 - 10x^3 + 37x^2 + px + q = 0$, если известно, что среди его корней имеются две пары равных между собой чисел.
2. Действительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1, a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел равно 1.
3. Рассмотрим многочлен с целыми коэффицентами $ax^3 + bx^2 + cx + d$ такой, что ad нечетное число, bc- четное. Докажите, что не все корни многочлена рациональны.
4. Пусть a, b и c - три различных числа. Решите систему
$$\begin{cases} z + ay + a^2x + a^3 = 0 \\ z + by + b^2x + b^3 = 0 \\ z + cy + c^2x + c^3 = 0 \end{cases}$$
5. Даны три действительных числа: a, b и c. Известно, что $a + b + c > 0, ab + +bc + ca > 0, abc > 0$. Докажите, что $a > 0, b > 0$ и $c > 0$.
6. Даны действительные числе $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ такие, что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ и $a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3$. Докажите, что если $a_1 \leq b_1$, то $a_3 \leq b_3$.
7. Известно, что
   а) $x + y = u + v$ и $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$; Докажите, что при любом натуральном n выполнено равенство $x^n + y^n = u^n + v^n$.
   б) $x + y + z = u + v + t, x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + t^2, x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + t^3$. Докажите, что при любом натуральном n выполнено равенство $x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + t^n$.
8. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - корни уравнения $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$. При каких k может быть такое, что $x_1x_2 = -32$?
9. Найдите сумму всевозможных произведений четного количества дробей $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$