Сборы школы 1568. 9 Класс

Метод штурма

1. а) Как изменяются при сближении двух положительных чисел с фиксированной суммой их произведение и сумма квадратов? А сумма обратных величин?

   б) Как меняется сумма и сумма обратных величин при сближении с фиксированным произведением?

2. Докажите для положительных $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$. неравенства о средних с помощью метода Штурма:

   а)
$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$$
   б)
$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

3. Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1, то
$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant n\left(n+\frac{1}{n}\right)^2.$$

4. Докажите, что для неотрицательных $x_1, x_2, \dots x_n$ с суммой 1 выполнено неравенство
$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leqslant 2n!.$$

5. Для положительных $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_7$ докажите, что
$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+a_5^2-a_6^2+a_7^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7)^2.$$

Домашнее задание

6. Сумма положительных чисел x_1, x_2, …, x_n равна 1. Докажите, что
$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant (n-1)^n$$

7. Пусть $x_1+\ldots+x_n=\frac{1}{2}$, а все x_i — неотрицательны. Докажите, что
$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Сборы школы 1568. 9 Класс

Метод штурма

1. а) Как изменяются при сближении двух положительных чисел с фиксированной суммой их произведение и сумма квадратов? А сумма обратных величин?

   б) Как меняется сумма и сумма обратных величин при сближении с фиксированным произведением?

2. Докажите для положительных $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$. неравенства о средних с помощью метода Штурма:

   а)
$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$$
   б)
$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

3. Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1, то
$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant n\left(n+\frac{1}{n}\right)^2.$$

4. Докажите, что для неотрицательных $x_1, x_2, \dots x_n$ с суммой 1 выполнено неравенство
$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leqslant 2n!.$$

5. Для положительных $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_7$ докажите, что
$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+a_5^2-a_6^2+a_7^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7)^2.$$

Домашнее задание

6. Сумма положительных чисел x_1, x_2, …, x_n равна 1. Докажите, что
$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant (n-1)^n$$

7. Пусть $x_1+\ldots+x_n=\frac{1}{2}$, а все x_i — неотрицательны. Докажите, что
$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$