Многочлены-2. С целыми коэффициентами

1. **Теорема о рациональном корне.** Доказать, что если несократимая рациональная дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, то
а) a_n делится на q;
б) a_0 делится на p;
в)* $P(x) = (qx - p)Q(x)$, где многочлен $Q(x)$ также имеет целые коэффициенты.
2. Найдите все корни уравнения $6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$.
3. **Важный факт.** Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что
а)$P(a) - P(b)$ делится на $a - b$ при всех целых a и b
б) если $a \equiv b\ (mod\ m)$, то $P(a) \equiv P(b)\ (mod\ m)$
4. а) Докажите, что не существует такого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(-1) = 2$ и $P(1) = 1$.
б) Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого для некоторых целых чисел a, b, c выполняется, что $P(a) = b, P(b) = c$ и $P(c) = a$.
5. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что в пяти различных целых точках его значение равно 5. Докажите, что ни в одной целой точке значение этого многочлена не может равняться 8.
6. $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что $P(P(x)) - Q(Q(x))$ делится на $P(x) - Q(x)$.
7. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
8. Докажите, что для многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует натуральное n такое, что $P(n)$ — составное.
9. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + ... + P(n)$ делится на k.
10. * Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k), P(k+1), ..., P(k+2019)$ будут составными, если n – произвольное натуральное число.

Домашнее задание

1. Если многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня. Докажите это.

Многочлены-2. С целыми коэффициентами

1. **Теорема о рациональном корне.** Доказать, что если несократимая рациональная дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, то
а) a_n делится на q;
б) a_0 делится на p;
в)* $P(x) = (qx - p)Q(x)$, где многочлен $Q(x)$ также имеет целые коэффициенты.
2. Найдите все корни уравнения $6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$.
3. **Важный факт.** Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что
а)$P(a) - P(b)$ делится на $a - b$ при всех целых a и b
б) если $a \equiv b\ (mod\ m)$, то $P(a) \equiv P(b)\ (mod\ m)$
4. а) Докажите, что не существует такого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(-1) = 2$ и $P(1) = 1$.
б) Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого для некоторых целых чисел a, b, c выполняется, что $P(a) = b, P(b) = c$ и $P(c) = a$.
5. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что в пяти различных целых точках его значение равно 5. Докажите, что ни в одной целой точке значение этого многочлена не может равняться 8.
6. $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что $P(P(x)) - Q(Q(x))$ делится на $P(x) - Q(x)$.
7. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
8. Докажите, что для многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует натуральное n такое, что $P(n)$ — составное.
9. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + ... + P(n)$ делится на k.
10. * Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k), P(k+1), ..., P(k+2019)$ будут составными, если n – произвольное натуральное число.

Домашнее задание

1. Если многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня. Докажите это.