Многочлены-1. Теорема Безу. Количество корней.

Определение. *Числовой функцией от x называется правило, которое сопоставляет каждому x на некоторой области определения некоторое число.*

Определение. *Многочлен — это выражение вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где a_i — коэффициенты многочлена, принадлежащие некоторому числовому множеству. Старшим коэффициентом называют $a_n \neq 0$, степенью многочлена — $\deg P(x) = n$, свободный член — a_0 . Два многочлена называются равными, если у них совпадают все коэффициенты. Вместо x можно подставить x_0 и, таким образом, вычислить значение в точке x_0 . Если, получившееся значение оказалось равно 0, то x_0 называют корнем многочлена.*

Теорема. *Для любых многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ существуют единственные многочлены $H(x)$ и $R(x)$, такие, что $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$ и $\deg R < \deg Q$. Если $R = 0$, то тогда $P(x)$ делится на $Q(x)$.*

Теорема. ***(Безу)*** *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен $P(a)$. Иначе говоря, $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$, для некоторого многочлена $Q(x)$.*

1. Является ли функцией от x выражение $y(x)$ а) $y = x^2$? б) $y^2 = x$?
   в) Является ли многочлен функцией?

2. Найдите старший коэффициент, степень, свободный член и сумму коэффицентов следующих многочленов
   а) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$; б)$(x^2 - x + 1)^7$; в)$(x^3 + x + 1)^4 - (x-2)^{12}$.

3. Докажите, что если раскрыть скобки в выражении $(x^2 - x + 1)^{2020}$ и привести подобные слагаемые, то хотя бы один коэффициент получившегося многочлена будет отрицательным.

4. Многочлен $P(x)$ дает остаток 5 при делении на $(x-2)$ и остаток 7 при делении на $(x-3)$. Какой остаток дает многочлен $P(x)$ при делении на $(x-2)(x-3)$?

5. а) Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - различные числа, и $P(a_i) = 0$ для всех $i \leq k$, то $P(x)$ делится на $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)$.
   б) Найдите при каких a и b многочлен $x^{10} + ax^2 + bx + 1$ делится на $x^2 - 1$.

6. а) Докажите, что у многочлена степени n не более n корней.
   б) Дан многочлен $F(x)$ четвёртой степени. Докажите, что прямая пересекает его график не более, чем в четырёх точках.
   в) Докажите, что если значения двух многочленов совпадают во всех целых точках, то многочлены равны.

7. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

8. Пусть $P(x)$- многочлен 10-ой степени такой, что $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2), \ldots, P(5) = P(-5)$.
   а) Докажите, что для любого x выполнено $P(x) = P(-x)$.
   б) Докажите, что в $P(x)$ ненулевые коэффициенты только при чётных степенях

9. Найдите все k, при которых выражение $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ делится на $x + y + z$.

10. а) Существует ли такой многочлен $P(x)$, что для любого x выполнено $P(x^2 - x + 1) = P(x)$?
    б) Существует ли такой многочлен $P(x)$, что для любого x выполнено $P(x^2 - x + 1) = P(x^2 + x + 1)$?

11. Дан многочлен $P(x)$ степени 2. Назовём двойку различных чисел (a, b) симметричной, если $P(a) = b, P(b) = a$. Докажите, что не бывает 5 различных симметричных двоек.

    Домашнее задание

12. Найдите все многочлены $P(x)$, для которых выполняется: $xP(x-1) \equiv (x-26)P(x)$.

Многочлены-1. Теорема Безу. Количество корней.

Определение. *Числовой функцией от x называется правило, которое сопоставляет каждому x на некоторой области определения некоторое число.*

Определение. *Многочлен — это выражение вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где a_i — коэффициенты многочлена, принадлежащие некоторому числовому множеству. Старшим коэффициентом называют $a_n \neq 0$, степенью многочлена — $\deg P(x) = n$, свободный член — a_0 . Два многочлена называются равными, если у них совпадают все коэффициенты. Вместо x можно подставить x_0 и, таким образом, вычислить значение в точке x_0 . Если, получившееся значение оказалось равно 0, то x_0 называют корнем многочлена.*

Теорема. *Для любых многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ существуют единственные многочлены $H(x)$ и $R(x)$, такие, что $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$ и $\deg R < \deg Q$. Если $R = 0$, то тогда $P(x)$ делится на $Q(x)$.*

Теорема. ***(Безу)*** *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен $P(a)$. Иначе говоря, $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$, для некоторого многочлена $Q(x)$.*

1. Является ли функцией от x выражение $y(x)$ а) $y = x^2$? б) $y^2 = x$?
   в) Является ли многочлен функцией?

2. Найдите старший коэффициент, степень, свободный член и сумму коэффицентов следующих многочленов
   а) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$; б)$(x^2 - x + 1)^7$; в)$(x^3 + x + 1)^4 - (x-2)^{12}$.

3. Докажите, что если раскрыть скобки в выражении $(x^2 - x + 1)^{2020}$ и привести подобные слагаемые, то хотя бы один коэффициент получившегося многочлена будет отрицательным.

4. Многочлен $P(x)$ дает остаток 5 при делении на $(x-2)$ и остаток 7 при делении на $(x-3)$. Какой остаток дает многочлен $P(x)$ при делении на $(x-2)(x-3)$?

5. а) Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - различные числа, и $P(a_i) = 0$ для всех $i \leq k$, то $P(x)$ делится на $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)$.
   б) Найдите при каких a и b многочлен $x^{10} + ax^2 + bx + 1$ делится на $x^2 - 1$.

6. а) Докажите, что у многочлена степени n не более n корней.
   б) Дан многочлен $F(x)$ четвёртой степени. Докажите, что прямая пересекает его график не более, чем в четырёх точках.
   в) Докажите, что если значения двух многочленов совпадают во всех целых точках, то многочлены равны.

7. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

8. Пусть $P(x)$- многочлен 10-ой степени такой, что $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2), \ldots, P(5) = P(-5)$.
   а) Докажите, что для любого x выполнено $P(x) = P(-x)$.
   б) Докажите, что в $P(x)$ ненулевые коэффициенты только при чётных степенях

9. Найдите все k, при которых выражение $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ делится на $x + y + z$.

10. а) Существует ли такой многочлен $P(x)$, что для любого x выполнено $P(x^2 - x + 1) = P(x)$?
    б) Существует ли такой многочлен $P(x)$, что для любого x выполнено $P(x^2 - x + 1) = P(x^2 + x + 1)$?

11. Дан многочлен $P(x)$ степени 2. Назовём двойку различных чисел (a, b) симметричной, если $P(a) = b, P(b) = a$. Докажите, что не бывает 5 различных симметричных двоек.

    Домашнее задание

12. Найдите все многочлены $P(x)$, для которых выполняется: $xP(x-1) \equiv (x-26)P(x)$.