Делимость-2. Основная теорема арифметики

Основная теорема арифметики. Любое число больше 1 может быть разложено в произведение одного или больше простых множителей, причем это разложение единственно.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

1. а) Верны ли утверждения:
   - если ни один из множителей не делится на некоторое число, то и произведение не делится на это число?
   - если число делится на два различных числа, то оно делится на их произведение?
   - если число делится на каждое из двух различных простых чисел, то оно делится на их произведение?
   б) Придумайте как обобщить последнее утверждение пункта а.

2. а) Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 109, 343, 549, 10!?
   б) Не вычисляя произведение $2016 \cdot 2013 \cdot 15 \cdot 77$ определите делится ли оно на 2,3,9,10,50,55,64,80, 121, 143, 18117.

3. Про a, b известно, что ни одно из них не кончается на ноль, а произведение 10000. Какие значения может принимать их сумма?

4. Критерий делимости через простые множители. Докажите, что a делится на b тогда и только тогда, когда все простые множители a, которые есть у b, есть и у a, причём в степени, не меньшей, чем у b.

5. Докажите, что если число является полным квадратом, то в его разложении на простые множители все показатели делятся на 2, т. е. имеет вид
$$n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}.$$

6. Верно ли
   а) если квадрат натурального числа делится на 5, то он делится на 25?
   б) если квадрат натурального числа делится на 6, то он делится на 36?
   в) если квадрат натурального числа делится на 4, то он делится на 16?
   г) если квадрат натурального числа делится на 8, то он делится на 16?

7. а) Найдите остаток при делении на 2019 числа 2018!
   б) Найдите остаток при делении на 2016 числа
$$1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2011 + 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 2012 + +3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2013 + 4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 2014 + 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 2015.$$

8. а) Существуют ли 3 натуральных числа таких, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на третье?
   б) Существует ли 100 таких чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на третье?

9. а) Натуральное число назовём удивительным, если самый большой его собственный делитель (т.е. делитель, не равный 1 и самому числу) на 1 больше самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа.
   б) Найдите всевозможные числа такие, что их наименьший собственный делитель в 7 раз меньше наибольшего собственного делителя.

10. По кругу расставили 2019 чисел. Может ли быть так, что отношение любых двух последовательных чисел- простое число?

Домашнее задание

11. Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

12. Существует ли n такое, что $n!$ оканчивается ровно на пять нулей?

Делимость-2. Основная теорема арифметики

Основная теорема арифметики. Любое число больше 1 может быть разложено в произведение одного или больше простых множителей, причем это разложение единственно.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

1. а) Верны ли утверждения:
   - если ни один из множителей не делится на некоторое число, то и произведение не делится на это число?
   - если число делится на два различных числа, то оно делится на их произведение?
   - если число делится на каждое из двух различных простых чисел, то оно делится на их произведение?
   б) Придумайте как обобщить последнее утверждение пункта а.

2. а) Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 109, 343, 549, 10!?
   б) Не вычисляя произведение $2016 \cdot 2013 \cdot 15 \cdot 77$ определите делится ли оно на 2,3,9,10,50,55,64,80, 121, 143, 18117.

3. Про a, b известно, что ни одно из них не кончается на ноль, а произведение 10000. Какие значения может принимать их сумма?

4. Критерий делимости через простые множители. Докажите, что a делится на b тогда и только тогда, когда все простые множители a, которые есть у b, есть и у a, причём в степени, не меньшей, чем у b.

5. Докажите, что если число является полным квадратом, то в его разложении на простые множители все показатели делятся на 2, т. е. имеет вид
$$n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}.$$

6. Верно ли
   а) если квадрат натурального числа делится на 5, то он делится на 25?
   б) если квадрат натурального числа делится на 6, то он делится на 36?
   в) если квадрат натурального числа делится на 4, то он делится на 16?
   г) если квадрат натурального числа делится на 8, то он делится на 16?

7. а) Найдите остаток при делении на 2019 числа 2018!
   б) Найдите остаток при делении на 2016 числа
$$1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 2011 + 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 2012 + +3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2013 + 4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 2014 + 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 2015.$$

8. а) Существуют ли 3 натуральных числа таких, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на третье?
   б) Существует ли 100 таких чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на третье?

9. а) Натуральное число назовём удивительным, если самый большой его собственный делитель (т.е. делитель, не равный 1 и самому числу) на 1 больше самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа.
   б) Найдите всевозможные числа такие, что их наименьший собственный делитель в 7 раз меньше наибольшего собственного делителя.

10. По кругу расставили 2019 чисел. Может ли быть так, что отношение любых двух последовательных чисел- простое число?

Домашнее задание

11. Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

12. Существует ли n такое, что $n!$ оканчивается ровно на пять нулей?