Графы. Эйлеровость.

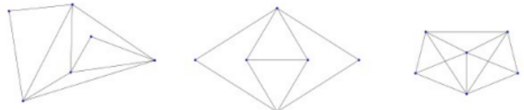
Разбор+ разбор 4 номера в конце урока.

1. Страна Лапландия почти вся состоит из непреодолимых гор и рек. В ней есть шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Известно, что из А проложены дороги в Б и Г, из Б — в А, Г и Д, из В — в Г и Е, из Г — в А, Б, В и Д, из Д — в Б и Г, из Е — только в В. Все остальные дороги непроходимы.
   а) Нарисуйте карту Лапландии.
   б) Может ли житель города А попасть в город Д, если ему нельзя проходить через Г?
   в)Сможет ли он при тех же условиях попасть в город Е?
2. Гуляя по Кенигсбергу, Леонард Эйлер захотел обойти город, пройдя по каждому мосту ровно один раз (см. рис.). Может ли он это сделать?

   Определение. Путь в графе, проходящий по всем ребрам, называется эйлеровым.
   Определение. Циклов - замкнутый путь в графе.
   Определение. Степень вершины- количество ребер из нее выходящих.

Устная сдача.

1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс —Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?
2. В шахматном турнире участвуют семь школьников. Каждые два участника за время турнира сыграли между собой не более одной партии. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Лёша и Дима — по три, Семён и Илья — по две, Женя — одну. С кем играл Лёша?
3. Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?
4. *а) В графе из любой вершины можно попасть в любую другую и в нем есть эйлеров путь. Доказать, что графе вершин с нечетной степенью не больше двух.
   *б) Докажите, что если в графе нет вершин нечетной степени, то он разбивается на непересекающиеся по ребрам замкнутые маршруты.
   *в) Докажите, что если в графе нет вершин нечетной степени, то его можно обойти так, что мы начнем и закончим в одной и той же точке.
   *г) Доказать обратное: если в связном (из любой вершины можно добраться в любую) графе вершин с нечётной степенью две, то в нем есть эйлеров путь.
5. Можно ли нарисовать картинки, изображенные на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги?

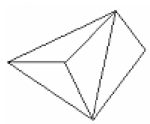


a) b) c)

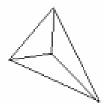
   Можно ли при этом закончить рисование в начальной точке?
6. а)Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?
   б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?
7. а) На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.
   б) А если 100 сердечек?
8. Любой ли связный граф можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?
9. В некоторой стране из каждого города выходит по три железные дороги. Две компании хотят их все приватизировать. Антимонопольный комитет требует, чтобы из каждого города выходили дороги обеих компаний. Докажите, что компании могут договориться так, чтобы требование антимонопольного комитета было выполнено.
10. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

Домашнее задание

11. а)Художник-авангардист нарисовал картину “Треугольники”. Мог ли он нарисовать свою картину, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды?
    б)А если его картина называлась “Треугольник и отрезки”?



«Треугольники»



«Треугольник и отрезки»