Показатели

1. Пусть a, n — взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел: 1, a, a^2, $\ldots$ Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

Определение Минимальный период последовательности остатков из предыдущей задачи называется *показателем* a по модулю n. Далее будем обозначать его буквой d.

2. а) Зафиксируем взаимно простые числа a и n. Докажите, что d — показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d — наименьшее такое натуральное число, что (a^d-1) делится на n.

   б) Пусть d — показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod n$. Докажите, что d делит l.

   в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod n$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod d$.

   г) Докажите, что показатель любого взаимно простого с n числа по модулю n делит $\varphi(n)$ (функция Эйлера).

3. Найдите все простые p и q такие, что q делит (2^p-1) и p делит (2^q-1).

4. Докажите, что если $a>1$, то n делит $\varphi(a^n-1)$.

5. а) Пусть $p>2$ — простое число. Докажите, что любой простой делитель числа (a^p-1) или делит $(a-1)$ или имеет вид $2px+1$.

   б) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2pk+1$ бесконечно много.

6. а) Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится на 101.

   б) Пусть p — простое число и $p>3$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^2+x+1\equiv 0 \pmod p$, то $p \equiv 1 \pmod 6$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $6n+1$.

   в) Пусть p — простое число и $p>5$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^4+x^3+x^2+x+1\equiv 0 \pmod p$, то $p\equiv 1 \pmod 5$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n+1$.

7. Найдите все простые p и q, для которых 5^p+5^q делится на pq.

8. Найдите все натуральные n такие, что n делит (2^n-1).

Показатели

1. Пусть a, n — взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел: 1, a, a^2, $\ldots$ Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

Определение Минимальный период последовательности остатков из предыдущей задачи называется *показателем* a по модулю n. Далее будем обозначать его буквой d.

2. а) Зафиксируем взаимно простые числа a и n. Докажите, что d — показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d — наименьшее такое натуральное число, что (a^d-1) делится на n.

   б) Пусть d — показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod n$. Докажите, что dl.

   в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod n$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod d$.

   г) Докажите, что показатель любого взаимно простого с n числа по модулю n делит $\varphi(n)$ (функция Эйлера).

3. Найдите все простые p и q такие, что $q(2^p-1)$ и $p(2^q-1)$.

4. Докажите, что если $a>1$, то n делит $\varphi(a^n-1)$.

5. а) Пусть $p>2$ — простое число. Докажите, что любой простой делитель числа (a^p-1) или делит $(a-1)$ или имеет вид $2px+1$.

   б) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2pk+1$ бесконечно много.

6. а) Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится на 101.

   б) Пусть p — простое число и $p>3$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^2+x+1\equiv 0 \pmod p$, то $p \equiv 1 \pmod 6$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $6n+1$.

   в) Пусть p — простое число и $p>5$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^4+x^3+x^2+x+1\equiv 0 \pmod p$, то $p\equiv 1 \pmod 5$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n+1$.

7. Найдите все простые p и q, для которых 5^p+5^q делится на pq.

8. Найдите все натуральные n такие, что n делит (2^n-1).