

Подвешивание графа.

1. Докажите, что количество висячих вершин в дереве не меньше, чем максимальная из степеней его вершин.
2. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?
3. В стране Фалкерсонии некоторые города соединены авиалиниями, причём из города А в город В нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из А в В будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.
4. В цветочном городе живёт некоторое число коротышек. В первый день один из них заболел. Если коротышка болеет, то к нему приходят все его здоровые друзья и заражаются (то есть становятся больными в следующий день). Если коротышка один день болел, то он выздоравливает на следующий день, и более того, получает иммунитет на этот день. Коротышка с иммунитетом может навещать друзей без риска заражения. Может ли так случиться, что эпидемия будет продолжаться бесконечно долго?
5. В классе 30 человек, один из них Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно пять общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечётным числом друзей.
6. а) В стране 51 городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 4 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 3 городов.
б) В стране 125 городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 5 дорог. Докажите, что существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 6 городов.)
в) Вася отметил на плоскости 2020 точек и соединил их их 4100 линиями. Докажите, что Вася существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 20 городов.
7. а) В компании у каждого сотрудника не менее 50 знакомых. Оказалось, что есть два сотрудника, знакомые друг с другом лишь через 9 рукопожатий (то есть кратчайшая соединяющая их цепочка знакомых содержит 8 промежуточных людей). Докажите, что в этой компании хотя бы 200 сотрудников.
б) В стране 2018 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.)
8. На планете 100 государств. Некоторые города соединены дорогами, причём из каждого города выходит не более 10 дорог. В каждом государстве есть город, из которого все дороги выходят только в города из этого государства. Докажите, что есть два города такие, что из одного нельзя попасть в другой не более чем за 2 пересадки.
9. В стране 2000 городов. Некоторые из них соединены дорогами так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причём он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдётся город, соединённый дорогами как минимум с восемью захолустными.

Подвешивание графа.

1. Докажите, что количество висячих вершин в дереве не меньше, чем максимальная из степеней его вершин.
2. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?
3. В стране Фалкерсонии некоторые города соединены авиалиниями, причём из города А в город В нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из А в В будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.
4. В цветочном городе живёт некоторое число коротышек. В первый день один из них заболел. Если коротышка болеет, то к нему приходят все его здоровые друзья и заражаются (то есть становятся больными в следующий день). Если коротышка один день болел, то он выздоравливает на следующий день, и более того, получает иммунитет на этот день. Коротышка с иммунитетом может навещать друзей без риска заражения. Может ли так случиться, что эпидемия будет продолжаться бесконечно долго?
5. В классе 30 человек, один из них Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно пять общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечётным числом друзей.
6. а) В стране 51 городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 4 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 3 городов.
б) В стране 125 городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 5 дорог. Докажите, что существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 6 городов.)
в) Вася отметил на плоскости 2020 точек и соединил их их 4100 линиями. Докажите, что Вася существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 20 городов.
7. а) В компании у каждого сотрудника не менее 50 знакомых. Оказалось, что есть два сотрудника, знакомые друг с другом лишь через 9 рукопожатий (то есть кратчайшая соединяющая их цепочка знакомых содержит 8 промежуточных людей). Докажите, что в этой компании хотя бы 200 сотрудников.
б) В стране 2018 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.)
8. На планете 100 государств. Некоторые города соединены дорогами, причём из каждого города выходит не более 10 дорог. В каждом государстве есть город, из которого все дороги выходят только в города из этого государства. Докажите, что есть два города такие, что из одного нельзя попасть в другой не более чем за 2 пересадки.
9. В стране 2000 городов. Некоторые из них соединены дорогами так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причём он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдётся город, соединённый дорогами как минимум с восемью захолустными.