Лемма о трезубце

1. Дан треугольник ABC, $AB \neq AC$. Докажите утверждения:
   а) Биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.
   б) Внешняя биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

2. **Лемма о трезубце.** В треугольнике ABC отметили центр I вписанной окружности, центр I_A вневписанной окружности напротив вершины A и середину A_0 «меньшей» дуги BC описанной окружности. Докажите, что $A_0B = A_0C = A_0I = A_0I_A$

3. **Внешняя версия леммы о трезубце.** В треугольнике ABC отметили центры I_B и I_C вневписанных окружностей напротив вершин B и C и середину A_0 «большей» дуги BC описанной окружности. Докажите, что $A_0B = A_0C = A_0I_B = A_0I_C$.

4. В неравнобедренном треугольнике ABC центр вписанной окружности обозначен через I. Докажите, что прямые AB и AC высекают равные хорды на описанной окружности треугольника BIC.

5. Прямая, соединяющая середины «меньших» дуг AB, AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает отрезки AB и AC в точках X и Y . Докажите, что $AXIY$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

7. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках B_0 и C_0 соответственно и пересекают друг друга в точке I. Окружности ω_B и ω_C с центрами в B_0 и C_0 касаются отрезков AC и AB соответственно. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_B и ω_C проходят через точки A и I.

Домашнее задание

8. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90^o$. В каком отношении I делит отрезок CW?

Лемма о трезубце

1. Дан треугольник ABC, $AB \neq AC$. Докажите утверждения:
   а) Биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.
   б) Внешняя биссектриса угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

2. **Лемма о трезубце.** В треугольнике ABC отметили центр I вписанной окружности, центр I_A вневписанной окружности напротив вершины A и середину A_0 «меньшей» дуги BC описанной окружности. Докажите, что $A_0B = A_0C = A_0I = A_0I_A$

3. **Внешняя версия леммы о трезубце.** В треугольнике ABC отметили центры I_B и I_C вневписанных окружностей напротив вершин B и C и середину A_0 «большей» дуги BC описанной окружности. Докажите, что $A_0B = A_0C = A_0I_B = A_0I_C$.

4. В неравнобедренном треугольнике ABC центр вписанной окружности обозначен через I. Докажите, что прямые AB и AC высекают равные хорды на описанной окружности треугольника BIC.

5. Прямая, соединяющая середины «меньших» дуг AB, AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает отрезки AB и AC в точках X и Y . Докажите, что $AXIY$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

7. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках B_0 и C_0 соответственно и пересекают друг друга в точке I. Окружности ω_B и ω_C с центрами в B_0 и C_0 касаются отрезков AC и AB соответственно. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_B и ω_C проходят через точки A и I.

Домашнее задание

8. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90^o$. В каком отношении I делит отрезок CW?