Вписанная и вневписанные окружности.

Обозначим стороны треугольника ABC, пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

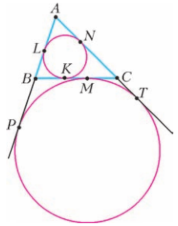
Определение. *Вписанная в треугольник окружность — окружность внутри треугольника, касающаяся всех его сторон. Центр этой окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника и называется инцентром треугольника.*

Определение. *Вневписанная окружность треугольника — окружность, лежащая вне треугольника и касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.*

1. а) Докажите, что биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего угла треугольника пересекаются в одной точке.
   б) Сколько существует точек равноудаленных от трех данных различных прямых?
   в) Сколько может быть окружностей, касающихся трех данных различных прямых?

2. Точка I_A — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Найдите $\angle BI_AC$, если $\angle BAC = \alpha$.

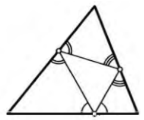
3. а) Вписанная окружность треугольника касается стороны BC в точке K. Докажите, что $CK = p-c$.
   б) Найдите AP.
   в) Вневписанная окружность треугольника касается стороны BC в точке M. Докажите, что $BM = p-c$.
   г) Докажите, что $\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{p-a}{p}$, где r-радиус вписанной окружности, а r_a- радиус внеписанной окружности, касающейся стороны a.
   д) Докажите, что $S = (p-a)r_a$.
   е) Докажите $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.
   ж) Докажите $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.



4. а) Провели биссектрисы двух внешних углов треугольника. Из точки их пересечения на его сторону опустили перпендикуляр. Он делит ее на отрезки с длинами 3 и 5. Найдите разность двух других сторон треугольника.
   б)CD - медиана треугольника ABC. Окружности вписанные в треугольники ACD и BCD касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC - BC = 2$.
   в) $ABCD$- параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что их точки касания AC совпадают.

5. а) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE-биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.
   б) На сторонах AB, BC и AC равностороннего треугольника выбраны точки K, M и N соответственно так, что угол MKB равен углу MNC, а угол KMB равен углу KNA. Докажите, что NB – биссектриса угла MNK.
   в) В равнобедренном треугольнике ABC из D середины основания AB к боковой стороне AC проведен отрезок DE-биссектриса угла ADC. Из точки E на боковую сторону ВС опущена высота EF. Докажите, что отрезок FD является биссектрисой угла EFB.

6. а) Восстановите треугольник по центрам трех его вневписанных окружностей.
   б) На сторонах треугольника выбраны три точки так, что отмеченные на рисунке углы равны. Докажите, что данные точки — основания высот треугольника.
   в) В треугольнике проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Чем для треугольника $A_1B_1C_1$ будут высоты треугольника ABC.



7. В треугольнике ABC с углом A равным 120^o, провели биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. а) Докажите, что $\angle B_1A_1C_1 = 90^o$.
   б) Найдите угол A_1C_1C.

8. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1, A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 -точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

Домашнее задание

9. От угла равностороннего треугольника со стороной 1 отрезали меньший треугольник так, что биссектриса его внешнего угла делит пополам сторону исходного треугольника, противоположную данному углу. Найдите периметр отрезанного треугольника.

10. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:
    а) радиус одной из вневписанных окружностей равен полупериметру треугольника;
    б) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из вневписанных окружностей;
    в) площадь треугольника равна произведению двух радиусов вневписанных окружностей.

Вписанная и вневписанные окружности.

Обозначим стороны треугольника ABC, пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

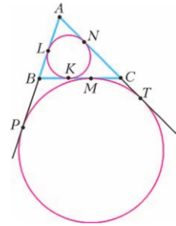
Определение. *Вписанная в треугольник окружность — окружность внутри треугольника, касающаяся всех его сторон. Центр этой окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника и называется инцентром треугольника.*

Определение. *Вневписанная окружность треугольника — окружность, лежащая вне треугольника и касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.*

1. а) Докажите, что биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего угла треугольника пересекаются в одной точке.
   б) Сколько существует точек равноудаленных от трех данных различных прямых?
   в) Сколько может быть окружностей, касающихся трех данных различных прямых?

2. Точка I_A — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Найдите $\angle BI_AC$, если $\angle BAC = \alpha$.

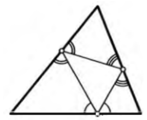
3. а) Вписанная окружность треугольника касается стороны BC в точке K. Докажите, что $CK = p-c$.
   б) Найдите AP.
   в) Вневписанная окружность треугольника касается стороны BC в точке M. Докажите, что $BM = p-c$.
   г) Докажите, что $\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{p-a}{p}$, где r-радиус вписанной окружности, а r_a- радиус внеписанной окружности, касающейся стороны a.
   д) Докажите, что $S = (p-a)r_a$.
   е) Докажите $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.
   ж) Докажите $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.



4. а) Провели биссектрисы двух внешних углов треугольника. Из точки их пересечения на его сторону опустили перпендикуляр. Он делит ее на отрезки с длинами 3 и 5. Найдите разность двух других сторон треугольника.
   б)CD - медиана треугольника ABC. Окружности вписанные в треугольники ACD и BCD касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC - BC = 2$.
   в) $ABCD$- параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что их точки касания AC совпадают.

5. а) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE-биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.
   б) На сторонах AB, BC и AC равностороннего треугольника выбраны точки K, M и N соответственно так, что угол MKB равен углу MNC, а угол KMB равен углу KNA. Докажите, что NB – биссектриса угла MNK.
   в) В равнобедренном треугольнике ABC из D середины основания AB к боковой стороне AC проведен отрезок DE-биссектриса угла ADC. Из точки E на боковую сторону ВС опущена высота EF. Докажите, что отрезок FD является биссектрисой угла EFB.

6. а) Восстановите треугольник по центрам трех его вневписанных окружностей.
   б) На сторонах треугольника выбраны три точки так, что отмеченные на рисунке углы равны. Докажите, что данные точки — основания высот треугольника.
   в) В треугольнике проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Чем для треугольника $A_1B_1C_1$ будут высоты треугольника ABC.



7. В треугольнике ABC с углом A равным 120^o, провели биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. а) Докажите, что $\angle B_1A_1C_1 = 90^o$.
   б) Найдите угол A_1C_1C.

8. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1, A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 -точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

Домашнее задание

9. От угла равностороннего треугольника со стороной 1 отрезали меньший треугольник так, что биссектриса его внешнего угла делит пополам сторону исходного треугольника, противоположную данному углу. Найдите периметр отрезанного треугольника.

10. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:
    а) радиус одной из вневписанных окружностей равен полупериметру треугольника;
    б) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из вневписанных окружностей;
    в) площадь треугольника равна произведению двух радиусов вневписанных окружностей.