

Принцип Дирихле в ТЧ-1.

1. Среди чисел $1, 2, 3, \dots, 100$ выбрано 55 чисел. Докажите, что среди них найдутся два числа разность которых равна а) 9 б) 10 в) 12 г) 13. д) Покажите, что среди них может не найтись двух чисел, разность которых равна 11.
2. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.
3. Назовем натуральное число интересным, если его можно разложить на натуральные множители, каждый из которых меньше, чем 30. Докажите, что из 2 000 интересных чисел всегда можно выбрать два, произведение которых является точным квадратом.
4. Докажите, что существует число, состоящее из одних единиц, делящееся на 2019.
5. Петя записал на доске в ряд n целых чисел. Докажите, что Вася может выбрать несколько подряд идущих чисел (возможно, одно) таких, что их сумма делится на n .
6. Какое наибольшее количество из натуральных чисел, не превосходящих $2n$, можно выбрать так, чтобы ни одно из них не делилось на другое?
7. Вася по одной цифре выписывает без пробелов все натуральные числа по порядку. Докажите, что однажды, приписав очередную цифру одного из чисел, получится число, кратное 2019^{2019} .
8. Существует ли 2017-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2017 разных 2017-значных точных квадратов?

Принцип Дирихле в ТЧ-2.

Петя записал на доске в ряд n целых чисел. Докажите, что Вася может выбрать несколько подряд идущих чисел (возможно, одно) таких, что их сумма делится на n .

1. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, используя все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?
2. Сумма 100 натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел с суммой 100.
3. На доске в строчку написаны 11 натуральных чисел. Докажите, что можно некоторые из них (но не все) стереть, а перед каждым из остальных написать знак $+$ или $-$ так, чтобы полученное выражение делилось на 2019.
4. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и нечётное число s , не делящееся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на s .
5. Произведение некоторых 2020 натуральных чисел имеет ровно 2019 различных простых делителей. Доказать, что либо одно из этих чисел, либо произведение нескольких из них является квадратом натурального числа.
6. В строку выписано 23 натуральных числа (не обязательно различных). Докажите, что между ними можно так расставить скобки, знаки сложения и умножения, что значение полученного выражения будет делиться на 2000 нацело.
7. На доске написано 2^{800} натуральных чисел, меньших 2019. Докажите, что произведение нескольких подряд идущих из них является точным квадратом.