Двудольные графы.

Определение. *Граф называется двудольным, если его вершины можно раскрасить в два цвета правильным образом, т.е. так, чтобы две соединенные ребром вершины были покрашены в разные цвета.*

1. Пусть Г — двудольный граф с чёрными и белыми вершинами. Докажите, что
   а) Если в Г есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
   б) Если в Г есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа чёрных вершин не более, чем на 1.

2. Докажите, что в двудольном графе сумма степеней вершин одного цвета равна сумме степеней вершин другого цвета.

3. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников.Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

4. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&4&5&8&9\\\hline 2&3&6&7&10\\\hline\end{array}$. Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, . . . , на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?

5. $2n$ футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие n команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

6. Дано 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, что отношение любых двух одноцветных чисел не является простым числом.

7. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нет нечетных циклов.

8. Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе с
   а) $2n$ вершинами;
   б) $2n + 1$ вершиной?

9. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

   Домашнее задание

10. Шесть мальчиков и 4 девочки организовали турнир в крестики-нолики на доске 3×3. Каждый сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью- 1 очко, за проигрыш- 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. На сколько игр, в которых девочка выиграла у мальчика, больше, чем игр, в которых мальчик выиграл у девочки.

Двудольные графы.

Определение. *Граф называется двудольным, если его вершины можно раскрасить в два цвета правильным образом, т.е. так, чтобы две соединенные ребром вершины были покрашены в разные цвета.*

1. Пусть Г — двудольный граф с чёрными и белыми вершинами. Докажите, что
   а) Если в Г есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
   б) Если в Г есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа чёрных вершин не более, чем на 1.

2. Докажите, что в двудольном графе сумма степеней вершин одного цвета равна сумме степеней вершин другого цвета.

3. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников.Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

4. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&4&5&8&9\\\hline 2&3&6&7&10\\\hline\end{array}$. Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, . . . , на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?

5. $2n$ футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие n команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

6. Дано 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, что отношение любых двух одноцветных чисел не является простым числом.

7. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нет нечетных циклов.

8. Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе с
   а) $2n$ вершинами;
   б) $2n + 1$ вершиной?

9. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

   Домашнее задание

10. Шесть мальчиков и 4 девочки организовали турнир в крестики-нолики на доске 3×3. Каждый сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью- 1 очко, за проигрыш- 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. На сколько игр, в которых девочка выиграла у мальчика, больше, чем игр, в которых мальчик выиграл у девочки.