Графы. Лемма о хороводах.

0. **Лемма о хороводах.** В некоторой компании каждый человек имеет ровно двух друзей. Докажите, что если все друзья возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов.

1. На кружке 20 школьникам было предложено 20 задач. Каждый школьник решил две задачи и каждую задачу решили ровно двое из них. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну задачу и все задачи были разобраны.

2. а)В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды.
б) Всегда ли можно организовать 11 дежурств?

3. В чемпионате России по футболу играют 16 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 8 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

4. а) В футбольном турнире участвует 20 команд. После того, как все команды провели по две игры, организаторы турнира решили разбить их на три дивизиона, но так, чтобы в одном дивизионе не было команд, уже игравших друг с другом. Всегда ли они смогут это сделать?
б)После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).

5. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

6. В верхних углах доски 3×3 стоят черные кони, а в нижних – белые. Как разместить коней одного цвета в противоположных клетках для них доски и сколько ходов для этого необходимо?

7. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: "Я могу одновременно поженить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!"Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!"Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае можно сделать и то, и другое!"Прав ли он?

8. На Всемирный день кошек n детям в садике решили подарить n котят. Каждый ребенок составил рейтинг котят, которые ему нравятся: какой больше всего, какой на втором месте и т.д. (никакие два котенка не нравятся никакому ребенку в одинаковой степени). Обсуждая полученные подарки, дети заметили, что при любом другом распределении котят хотя бы одному из них досталась бы меньше нравящийся ему котенок. Докажите, что хотя бы один из детей получил того котенка, который нравится ему больше всего.

9. Есть 30 шариков пятнадцати цветов (по два шарика каждого цвета). Они разложены поровну по 15 мешкам. Известно, что можно вытащить из каждого мешка по одному шарику так, что все вытащенные 15 шариков будут разноцветные. Докажите, что число способов так вытащить 15 шариков есть степень двойки.

10. В некотором городе разрешены только парные обмены квартир. За день человек может совершить не больше 1 обмена. Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

Домашнее задание

11. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение) из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города

Графы. Лемма о хороводах.

0. **Лемма о хороводах.** В некоторой компании каждый человек имеет ровно двух друзей. Докажите, что если все друзья возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов.

1. На кружке 20 школьникам было предложено 20 задач. Каждый школьник решил две задачи и каждую задачу решили ровно двое из них. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну задачу и все задачи были разобраны.

2. а)В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды.
б) Всегда ли можно организовать 11 дежурств?

3. В чемпионате России по футболу играют 16 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 8 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

4. а) В футбольном турнире участвует 20 команд. После того, как все команды провели по две игры, организаторы турнира решили разбить их на три дивизиона, но так, чтобы в одном дивизионе не было команд, уже игравших друг с другом. Всегда ли они смогут это сделать?
б)После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).

5. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

6. В верхних углах доски 3×3 стоят черные кони, а в нижних – белые. Как разместить коней одного цвета в противоположных клетках для них доски и сколько ходов для этого необходимо?

7. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: "Я могу одновременно поженить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!"Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!"Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае можно сделать и то, и другое!"Прав ли он?

8. На Всемирный день кошек n детям в садике решили подарить n котят. Каждый ребенок составил рейтинг котят, которые ему нравятся: какой больше всего, какой на втором месте и т.д. (никакие два котенка не нравятся никакому ребенку в одинаковой степени). Обсуждая полученные подарки, дети заметили, что при любом другом распределении котят хотя бы одному из них досталась бы меньше нравящийся ему котенок. Докажите, что хотя бы один из детей получил того котенка, который нравится ему больше всего.

9. Есть 30 шариков пятнадцати цветов (по два шарика каждого цвета). Они разложены поровну по 15 мешкам. Известно, что можно вытащить из каждого мешка по одному шарику так, что все вытащенные 15 шариков будут разноцветные. Докажите, что число способов так вытащить 15 шариков есть степень двойки.

10. В некотором городе разрешены только парные обмены квартир. За день человек может совершить не больше 1 обмена. Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

Домашнее задание

11. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение) из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города