Числа Фибоначчи

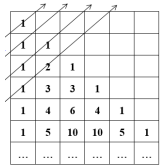
0. а) Костя поднимается на лестницу. Он может шагать на следующую ступеньку, либо прыгать через одну. Сколькими способами он может подняться на 11ю ступеньку?
   б) Сколькими способами можно уложить 11 домино 1×2 в прямоугольник 2×11?

1. а) У Вероники есть квадратик 1×1. Каждый раз к большей стороне имеющейся у неё фигуры Вероника пририсовывает квадрат, сторона которого равна этой стороне. После 11 таких пририсовываний получился прямоугольник. Найдите его стороны.
   б) Ваня нанизывает на нитку мух и слепней. Двух слепней подряд нанизывать нельзя. Найдите число различных вариантов, которыми Ваня может нанизать 11 насекомых.
   в) Сколько существует последовательностей из 1 и 2, сумма которых равна 11?

   Определение. *Числа Фибоначчи – это последовательность целых чисел F_n, заданная следующими правилами. Первые два числа равны единице, а каждое следующее число равно сумме двух предыдущих:* , .

2. Классическая формулировка последовательности Фибоначчи. Фибоначчи приобрел пару кроликов. Каждая пара кроликов раз в месяц производит на свет еще пару кроликов, а новорожденные приносят первое потомство уже через два месяца после рождения. Сколько пар кроликов будет у Фибоначчи через год?

3. Треугольник Паскаля записан в в виде прямоугольной таблицы (см. рисунок). Докажите, что суммы чисел на диагоналях снизу вверх направо равны числам Фибоначчи.



4. Чему равен остаток от деления F_{100} на F_{99} ?

5. а) Докажите, что два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.
   б) Докажите, что если m делится на n, F_m делится на F_n.

6. Докажите, что среди чисел Фибоначчи найдется бесконечно много а) четных; б) кратных 7. Каковы номера чисел Фибоначчи, делящихся на 7?

7. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи. Докажите, что для любого натурального n, в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов а) имеющих остаток 1 при делении на n б) делящихся на n.

8. Докажите, что последовательность p-значных чисел, записываемых p последними цифрами чисел ряда Фибоначчи, начиная с некоторого места, является периодической.

9. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтоб он остался треугольником). За какое наименьшее число операций можно из правильного треугольника со стороной 1 м сделать правильный треугольник со стороной 1 см?

10. Девять палок длиной по 1м сломали на 17 частей каждую. Доказать, что найдутся три куска, из которых можно сложить треугольник.

    Домашнее задание

11. Вообразите, что существует лента, разбитая на клетки. Она уходит вправо и длится бесконечно долго. На первую клетку ленты поместим кузнечика. На какой бы из клеток ленты он ни находился, он может перемещаться только вправо: или на одну клетку, или на две. Сколько существует способов, которыми кузнечик может допрыгать от начала ленты до n-ой клетки?

Числа Фибоначчи. Тождества

Некоторые свойства чисел Фибоначчи.

1. Докажите, что $(n+1)$-е число Фибоначчи не больше 2^n.

2. Докажите, что
   а) $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$;
   б) $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;
   в) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

3. Докажите, что $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

4. Докажите, что $nF_1 + (n-1)F_2 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+4} - (n+3)$.

5. Докажите, что $F_1 + 2F_2 + \ldots + nF_n = F_{n+3} + 2$.

6. Докажите следующие тождества:
   а) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$; б)$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$; в)$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$; г) $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$.

7. Докажите, что где Fn – n-ый член последовательности Фибоначчи, а суммирование в левой части ведется до тех пор, пока верхний индекс не превосходит нижний.

8. Докажите тождества: а)$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$; б)$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Добавка по числам Фибоначчи

9. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы положительных нечётных слагаемых? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

10. Чему равно количество подмножеств множества $1, 2, 3, \ldots, n$? Не содержащих двух последовательных чисел?

11. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых не меньше, чем 2? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

12. Есть набор гирь веса 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, ..., 256 г. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов.
    а) Докажите, что никакой груз нельзя взвесить более, чем 55 способами;
    б) Приведите пример груза, который можно взвесить 55 способами.

13. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ да надо заплатить 2 рубля, за ответ нет – 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка отгадать число?