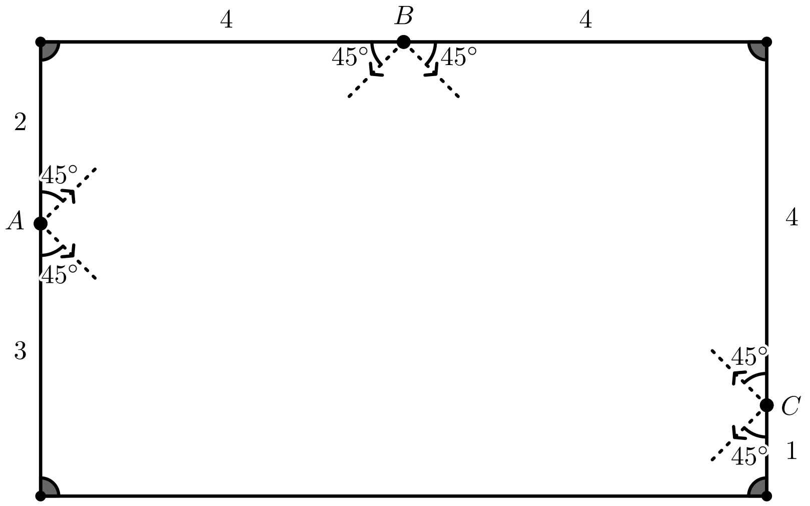
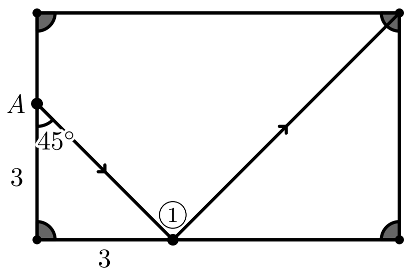
Начинающие. Решения

1. Дан прямоугольный стол размером 8×5, в углах которого расположены лунки. Шар по очереди запускают из точек A, B и C в шести указанных на рисунке направлениях. В каких случаях шар попадёт в одну из лунок после не более чем 6 отражений? (Шар отражается от сторон прямоугольника по закону «угол падения равен углу отражения».)

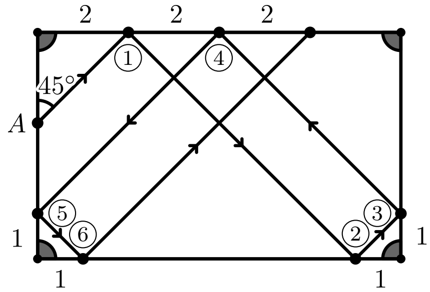


(Hirad Alipanah)

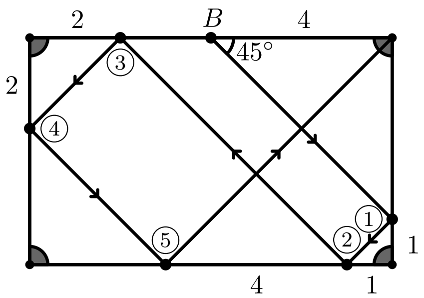
Решение. Легко найти все возможные траектории движения шара.



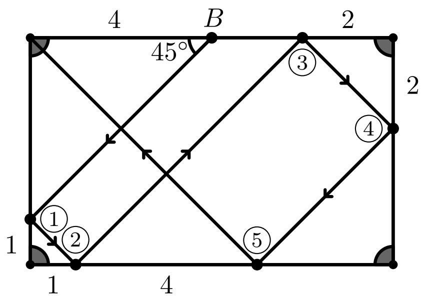
(a) Шар попадает в лунку после одного отражения



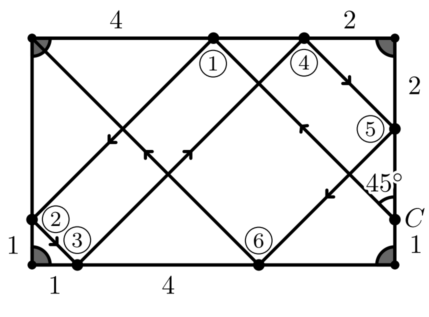
(b) Шар не попадает в лунку после шести отражений



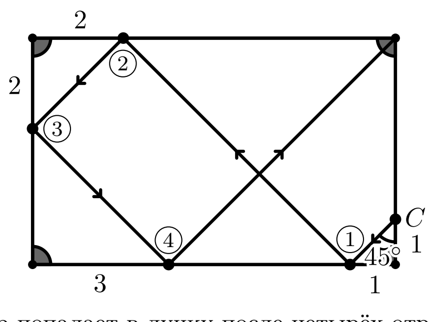
(a) Шар попадает в лунку после пяти отражений



(b) Шар попадает в лунку после пяти отражений



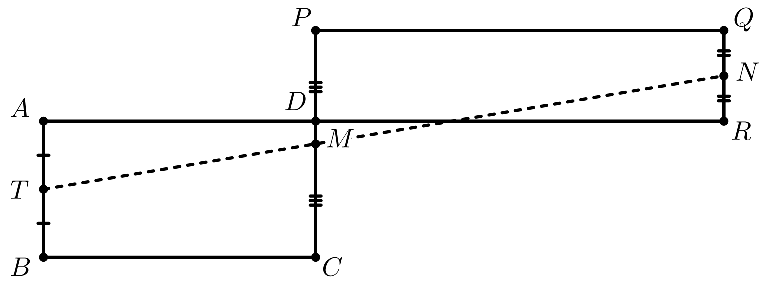
(a) Шар попадает в лунку после шести отражений



(b) Шар попадает в лунку после четырёх отражений

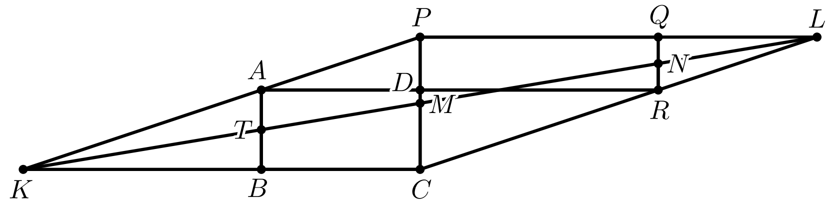
Подходят все случаи, кроме случая $A(b)$.

2. Два прямоугольника $ABCD$ и $PQRD$ одинаковой площади, соответствующие стороны которых параллельны, расположены, как показано на рисунке. Точки N, M и T — середины отрезков QR, PC и AB соответственно. Докажите, что точки N, M и T лежат на одной прямой.



(Morteza Saghafian)

Решение. Пусть L — точка пересечения PQ и CR, K — точка пересечения BC и AP.



Поскольку $QR \parallel PC$, то точки L, N и M лежат на одной прямой. Аналогично, точки K, T и M лежат на одной прямой. Докажем, что четырёхугольник $PLCK$ — параллелограмм. Из этого будет следовать, что точки K, M и L лежат на одной прямой, откуда, в свою очередь, будет следовать утверждение задачи. Поскольку $PL \parallel CK$, то достаточно показать параллельность оставшейся пары сторон ($KP \parallel CL$ или, что то же самое, $AP \parallel CR$). Площади прямоугольников равны, поэтому

$$PD \cdot DR = AD \cdot CD \Longrightarrow \frac{PD}{CD} = \frac{AD}{DR},$$

откуда $AP \parallel CR$, что и требовалось.

3. На плоскости проведены $n > 2$ прямых общего положения, то есть никакие две прямые не параллельны и никакие три прямые не проходят через одну точку. Точки пересечения этих прямых отметили, после чего все прямые стёрли, оставив при этом отмеченные точки. Неизвестно, каким двум прямым принадлежит каждая из отмеченных точек. Всегда ли можно однозначно узнать, какая точка какой прямой принадлежит, и восстановить исходные прямые?

(Boris Frenkin – Russia)

Ответ: Да, всегда.

Решение. Проведем все прямые, которые содержат по крайней мере $n-1$ отмеченную точку. Все исходные прямые содержатся среди этих прямых. Докажем, что мы не провели лишних прямых.

Пусть некоторая прямая l содержит некоторые $n-1$ отмеченную точку. Эти точки являются точками пересечения некоторых исходных прямых

$$(l_1, l_2),\ (l_3, l_4), \ldots,\ (l_{2n-3}, l_{2n-2}).$$

Так как $n > 2$, то $2n-2 > n$, поэтому l_i совпадает с l_j для некоторых $1 \leqslant i < j \leqslant 2n-2$. Тогда эти прямые принадлежат различным парам в списке, и две соответствующие отмеченные точки принадлежат $l_i = l_j$. Но тогда $l = l_i$, что и требовалось.

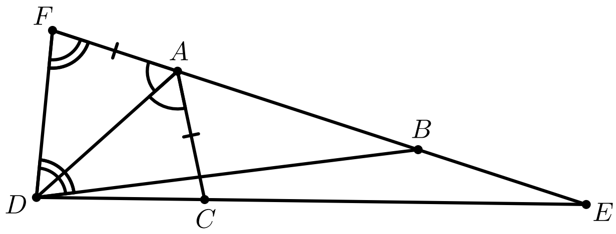
4. Дан четырёхугольник $ABCD$ такой, что

$$\angle DAC = \angle CAB = 60^\circ, \quad AB = BD - AC.$$

Обозначим через E точку пересечения прямых AB и CD. Докажите, что $\angle ADB = 2\angle BEC$.

(Iman Maghsoudi)

Решение. Рассмотрим точку F на луче BA такую, что $AF = AC$.



Поскольку $AB = BD - AC$, то $BF = BD$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} AF = AC \\ AD = AD \\ \angle FAD = \angle CAD = 60^\circ \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle FAD = \triangle CAD. \tag{1}$$

Заметим, что

$$\angle BEC = \angle FAD - \angle ADC \overset{(1)}{=} 60^\circ - \angle ADF \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \angle ADB = \angle FDB - \angle ADF = \angle AFD - \angle ADF = \\ = (120^\circ - \angle ADF) - \angle ADF = 120^\circ - 2\angle ADF \overset{(2)}{=} 2\angle BEC. \end{aligned}$$

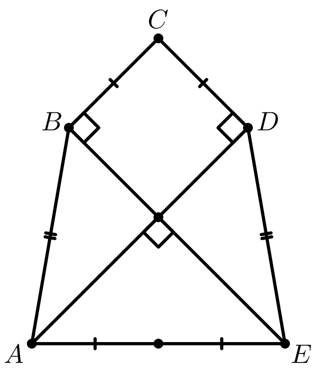
Таким образом, утверждение задачи доказано.

5. Назовём диагональ выпуклого многоугольника (т.е. многоугольника, все углы которого меньше $180°$) *срединной*, если она делит пополам и площадь, и периметр многоугольника. Какое наибольшее число срединных диагоналей может быть у выпуклого пятиугольника?

(Morteza Saghafian)

Ответ: Максимальное число срединных диагоналей равно 2.

Решение. Заметим, что для каждой вершины существует не более одной проходящей через нее срединной диагонали. Следовательно, в пятиугольнике не более двух срединных диагоналей. Пример пятиугольника с двумя срединными диагоналями изображён на рисунке ниже.

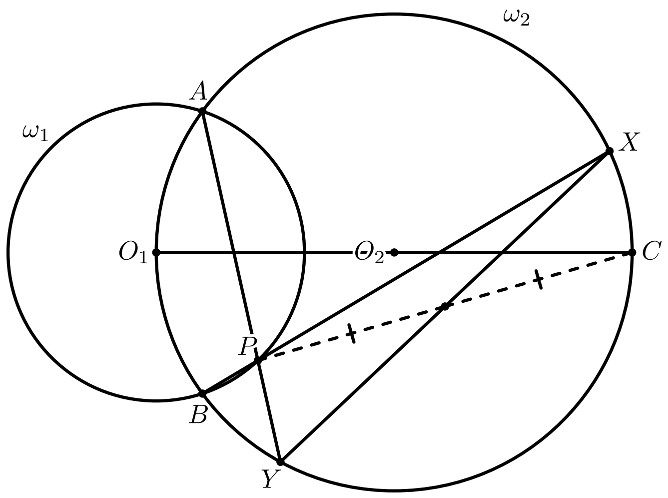


Продолжающие. Решения

1. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B, причём точка O_1 лежит на ω_2. На окружности ω_1 выбрана произвольная точка P. Прямые BP, AP и O_1O_2 вторично пересекают ω_2 в точках X, Y и C соответственно. Докажите, что четырёхугольник $XPYC$ является параллелограммом.

(Iman Maghsoudi)

Решение.



Заметим, что

$$\angle APB = \frac{\overset{\frown}{AO_1B}}{2} + \frac{\overset{\frown}{XCY}}{2}. \tag{3}$$

Поскольку $\angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1$, то $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$. В силу того, что O_1 — центр описанной окружности треугольника APB, имеем

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{\angle AO_1B}{2} = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{AXC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}. \tag{4}$$

Объединяя равенства (3) и (4), получаем

$$\frac{\overset{\frown}{AO_1B}}{2} + \frac{\overset{\frown}{XCY}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} \Longrightarrow \overset{\frown}{XCY} = \overset{\frown}{BYC},$$

откуда $BX \parallel CY$. Аналогично $AY \parallel XC$, откуда следует, что $XPYC$ — параллелограмм.

2. Найдите все четырёхугольники $ABCD$ такие, что все четыре треугольника ABC, ABD, ACD и BCD попарно подобны.

(Morteza Saghafian)

Ответ. Все прямоугольники.

Решение. Сперва допустим, что $ABCD$ — невыпуклый четырехугольник. Без ограничения общности будем считать, что $\angle D > 180°$, т.е точка D лежит внутри треугольника ABC. Также без ограничения общности будем считать, что $\angle B$ — наибольший угол треугольника ABC. Тогда

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD + \angle BCD > \angle ABC$$

Таким образом $\angle ADC$ больше каждого угла треугольника ABC, поэтому треугольники ABC и ACD не могут быть подобны. Таким образом, четырёхугольник $ABCD$ должен быть выпуклым.

Теперь будем считать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Без ограничения общности, $\angle B$ — наибольший угол четырехугольника. Тогда

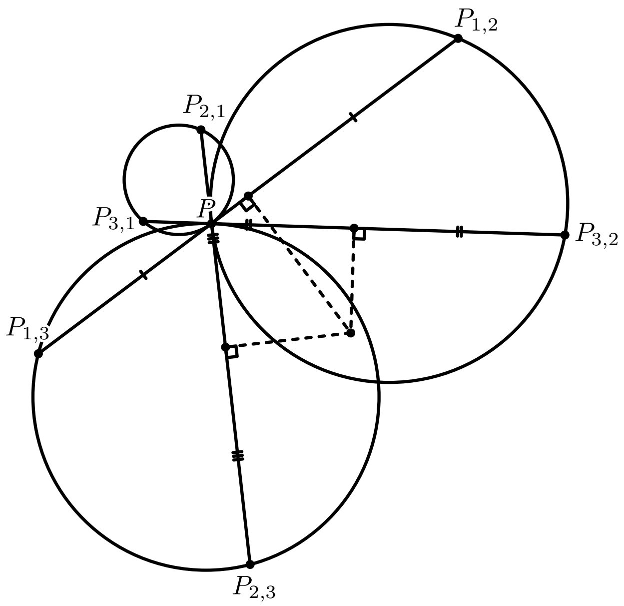
$$\angle ABC > \angle DBC, \quad \angle ABC \geqslant \angle ADC \geqslant \angle BCD.$$

Так как треугольники ABC и BCD подобны, то $\angle ABC = \angle BCD$ — соответственные углы подобных треугольников. Аналогично получаем, что все углы четырехугольника $ABCD$ равны, следовательно, $ABCD$ — прямоугольник. Легко убедиться, что все прямоугольники удовлетворяют условию.

3. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 проходят через точку P. Касательная к ω_1, проведённая в точке P, вторично пересекает ω_2 и ω_3 в точках $P_{1,2}$ и $P_{1,3}$ соответственно. Точки $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ и $P_{3,2}$ определяются аналогично. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ и $P_{3,1}P_{3,2}$ пересекаются в одной точке.

(Mahdi Etesamifard)

Решение.



Сначала предположим, что никакие две из прямых $\ell_1 \equiv P_{2,1}P_{3,1}$, $\ell_2 \equiv P_{1,2}P_{3,2}$ и $\ell_3 \equiv P_{1,3}P_{2,3}$ не параллельны. Рассмотрим треугольник XYZ, полученный в пересечении этих прямых:

$$X \equiv \ell_2 \cap \ell_3\,, \quad Y \equiv \ell_1 \cap \ell_3\,, \quad Z \equiv \ell_2 \cap \ell_1\,.$$

Заметим, что

$$\angle P_{3,2}P_{1,2}P = \angle P_{3,2}PP_{2,3} = \angle PP_{1,3}P_{2,3}\,,$$

откуда $XP_{1,2} = XP_{1,3}$. Аналогично, получаем, что $YP_{2,1} = YP_{2,3}$ и $ZP_{3,1} = ZP_{3,2}$. Следовательно, биссектрисы углов YXZ, XYZ и YZX совпадают с серединными перпендикулярами к отрезкам $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ и $P_{3,1}P_{3,2}$. Тогда эти серединные перпендикуляры пересекаются в центре вписанной окружности треугольника XYZ, что доказывает утверждение задачи.

Теперь допустим, что хотя бы две из прямых $\ell_1 \equiv P_{2,1}P_{3,1}$, $\ell_2 \equiv P_{1,2}P_{3,2}$ и $\ell_3 \equiv P_{1,3}P_{2,3}$ параллельны. Без ограничения общности, параллельны прямые ℓ_1 и ℓ_2. Аналогично предыдущему случаю

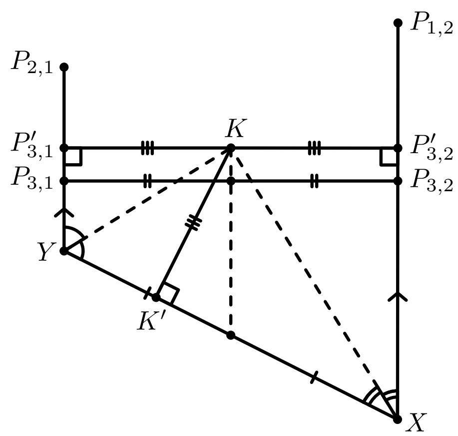
$$\angle P_{1,2}P_{3,2}P = \angle P_{1,2}PP_{2,1} = \angle P_{2,1}P_{3,1}P.$$

Так как $\ell_1 \parallel \ell_2$, то

$$\angle P_{1,2}P_{3,2}P + \angle P_{2,1}P_{3,1}P = 180^\circ,$$

следовательно, $\angle P_{1,2}P_{3,2}P = \angle P_{2,1}P_{3,1}P = 90^\circ$. Из этого равенства следует, что прямые ℓ_3 и ℓ_2 не параллельны, так как в противном случае $\ell_3 \perp P_{1,3}P_{1,2}$ и $\ell_2 \perp P_{1,3}P_{1,2}$, откуда $P_1, P_{1,2} \parallel P_{3,1}P_{3,2}$, что невозможно.

Рассмотрим трапецию $XYP_{2,1}P_{1,2}$. Необходимо показать, что биссектрисы углов X и Y и серединный перпендикуляр к отрезку $P_{3,1}P_{3,2}$ пересекаются в одной точке. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны серединному перпендикуляру к отрезку $P_{3,1}P_{3,2}$, то есть серединный перпендикуляр к $P_{3,1}P_{3,2}$ соединяет середины отрезков XY и $P_{3,1}P_{3,2}$. Теперь утверждение задачи следует из следующего известного факта.



Утверждение. В трапеции $XYP_{2,1}P_{1,2}$ биссектриса угла $\angle X$, биссектриса угла $\angle Y$ и средняя линия трапеции пересекаются в одной точке.

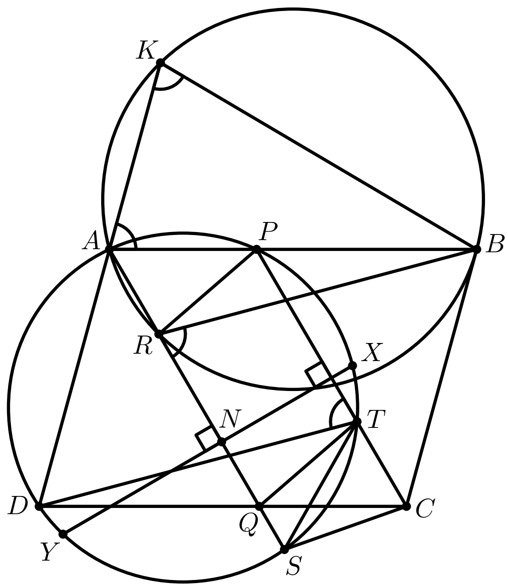
Доказательство утверждения. Обозначим через K точку пересечения биссектрис углов X и Y. Обозначим через $P'_{3,2}$, $P'_{3,1}$ и K' основания перпендикуляров, опущенных из точки K на прямые $P_{1,2}X$, $P_{2,1}Y$ и XY, соответственно. В силу того, что K лежит на биссектрисе $\angle X$, имеем $KP'_{3,2} = KK'$, и аналогично в силу того, что K лежит на биссектрисе $\angle Y$, имеем $KP'_{3,1} = KK'$. Таким образом, $KP'_{3,1} = KP'_{3,2}$, откуда K лежит на средней линии трапеции $XYP_{2,1}P_{1,2}$.

Таким образом, задача решена.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка K на прямой AD такова, что $BK = AB$. Пусть P — произвольная точка на прямой AB. Серединный перпендикуляр к отрезку PC пересекает описанную окружность треугольника APD в точках X и Y. Докажите, что описанная окружность треугольника ABK проходит через ортоцентр треугольника AXY.

(Iman Maghsoudi)

Решение. Проведём высоту AN треугольника AXY. Предположим, что описанная окружность треугольника ABK пересекает AN в точке R. Достаточно показать, что R — ортоцентр треугольника AXY.



Пусть прямые PC и AN вторично пересекают описанную окружность треугольника APD в точках T и S, соответственно, а прямая AN пересекает прямую CD в точке Q. Тогда

$$\angle BRS = \angle AKB = \angle KAB = \angle PTD \implies \angle BRS = \angle PTD. \tag{5}$$

Прямая XY перпендикулярна AN и PC, откуда $AN \parallel PC$. Также $AP \parallel CQ$, поэтому $APCQ$ — параллелограмм. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \angle BAR = \angle TCD \\ (5) \Rightarrow \angle ARB = \angle CTD \\ AB = CD \end{array}\right\} \implies \triangle ARB = \triangle CTD \implies CT = AR. \tag{6}$$

Следовательно, четырехугольник $PTQR$ также является параллелограммом. Трапеция $APTS$ равнобокая, откуда

$$CQ = AP = TS.$$

Но тогда $TQSC$ — также равнобокая трапеция. Наконец,

$$CS = TQ = PR \implies CSRP \text{ — равнобокая трапеция.}$$

Таким образом, точки S и R симметричны относительно прямой XY, поэтому R — ортоцентр треугольника AXY.

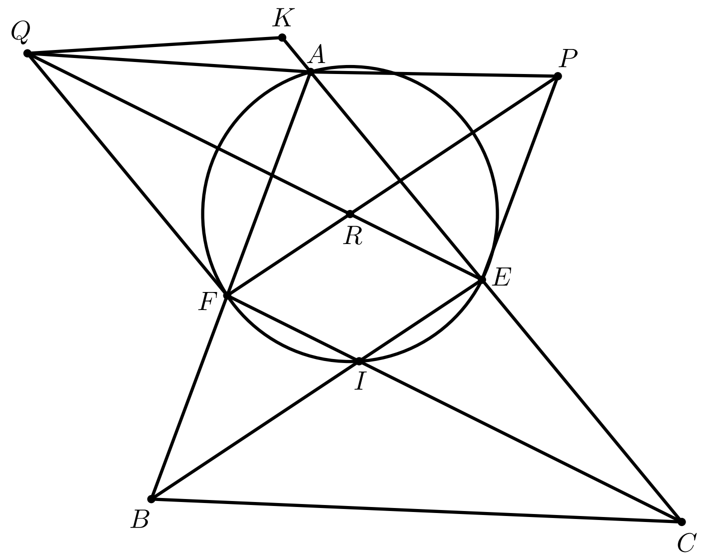
5. Угол A треугольника ABC равен $60°$. Точки E и F — основания биссектрис углов B и C соответственно. Точки P и Q таковы, что четырёхугольники $BFPE$ и $CEQF$ являются параллелограммами. Докажите, что $\angle PAQ > 150°$. (Рассматривается угол PAQ, который не содержит сторону AB треугольника.)

(Alireza Dadgarnia)

Решение. Обозначим через I точку пересечения прямых BE и CF, а через R — точку пересечения прямых QE и PF. Несложно видеть, что $\angle BIC = 120°$, откуда четырёхугольник $AEIF$ является вписанным и

$$CE \cdot CA = CI \cdot CF \tag{7}$$

Поскольку $\angle PRQ = \angle BIC = 120°$, то достаточно доказать, что один из углов $\angle APR$ или $\angle AQR$ не меньше $30°$.



Предположим противное, пусть оба угла меньше $30°$. Тогда на луче AC существует такая точка K, что $\angle KQE = 30°$. Так как $\angle IAC = 30°$ и $\angle ACI = \angle KEQ$, то треугольники AIC и QKE подобны. Отсюда

$$\frac{CI}{CA} = \frac{KE}{QE} > \frac{AE}{CF} \implies AE < \frac{CF \cdot CI}{CA} \overset{(7)}{=} CE.$$

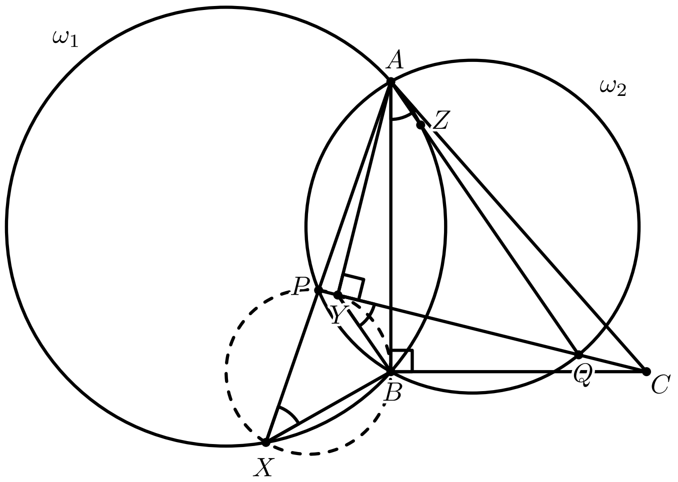
Аналогично получим, что $AF < BF$. С другой стороны, хотя бы один из углов ABC или ACB не меньше $60°$. Без ограничения общности, $\angle ABC \geqslant 60°$, тогда $AC \geqslant BC$, откуда по свойству биссектрисы $AF \geqslant BF$, противоречие. Таким образом, задача решена.

Профессионалы

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На касательной к окружности ω_1, проведённой в точке A, выбрана такая точка C, что $\angle ABC = 90^\circ$. Через точку C проведена прямая ℓ, которая пересекает ω_2 в точках P и Q. Прямые AP и AQ вторично пересекают ω_1 в точках X и Z соответственно. Пусть Y — основание перпендикуляра из точки A на прямую ℓ. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

(Iman Maghsoudi)

Решение.



Поскольку $\angle AYC = \angle ABC = 90^\circ$, то четырёхугольник $AYBC$ вписанный. Следовательно,

$$\angle BYC = \angle BAC = \angle BXA = \angle BXP.$$

Таким образом, четырёхугольник $PYBX$ является вписанным. Аналогично четырёхугольник $QBYZ$ вписанный. Тогда

$$\angle BYX = \angle BPX = \angle AQB = \angle ZQB = 180^\circ - \angle ZYB.$$

Отсюда точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

2. Верно ли, что в любом выпуклом n-угольнике, $n > 3$, существует вершина и выходящая из неё диагональ такие, что диагональ образует острые углы с обеими сторонами, выходящими из этой вершины?

(Boris Frenkin – Russia)

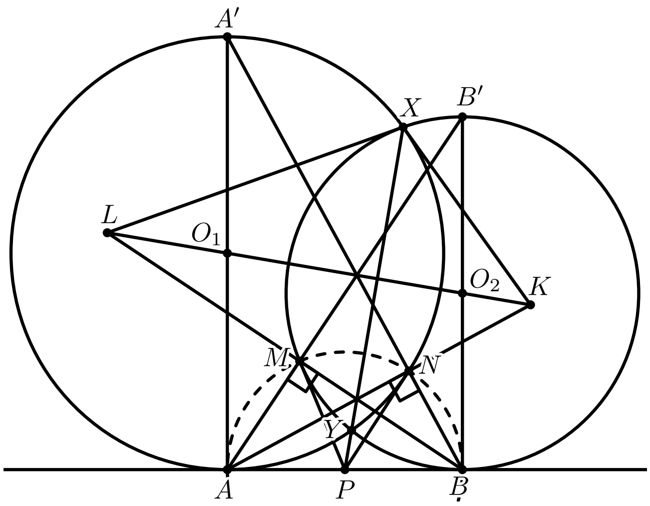
Ответ. Да, верно.

Решение. Допустим, утверждение задачи неверно. В данном выпуклом n-угольнике ($n > 3$), рассмотрим наибольшую диагональ AD (если таких несколько, выберем произвольную из них). Пусть B и C — вершины, соседние с A. Без ограничения общности, предположим, что $\angle BAD \geqslant 90°$. Тогда $BD > AD$, поэтому BD — это не диагональ, а сторона n-угольника, причём $\angle ADB < 90°$. Обозначим через C' соседнюю с D вершину, отличную от B. Тогда $\angle ADC' \geqslant 90°$. Аналогично $AC' > AD$, поэтому AC' — сторона многоугольника, $C' \equiv C$ и $n = 4$. Углы BAC и BDC тупые, поэтому диагональ BC длиннее, чем стороны AC и BD, откуда $BC > AD$, то есть AD не наибольшая диагональ, противоречие. Таким образом, предположение неверно.

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках X и Y. Прямая AB является общей внешней касательной к этим окружностям, причём точка A лежит на ω_1, а B — на ω_2. Касательные к ω_1 и ω_2, проведённые в точке X, пересекают прямую O_1O_2 в точках K и L соответственно. Прямая BL вторично пересекает ω_2 в точке M, а прямая AK вторично пересекает ω_1 в точке N. Докажите, что прямые AM, BN и O_1O_2 пересекаются в одной точке.

(Dominik Burek – Poland)

Решение. Обозначим через P середину отрезка AB. Поскольку P имеет одинаковую степень относительно обеих окружностей, то она лежит на радикальной оси этих окружностей, то есть на прямой XY.

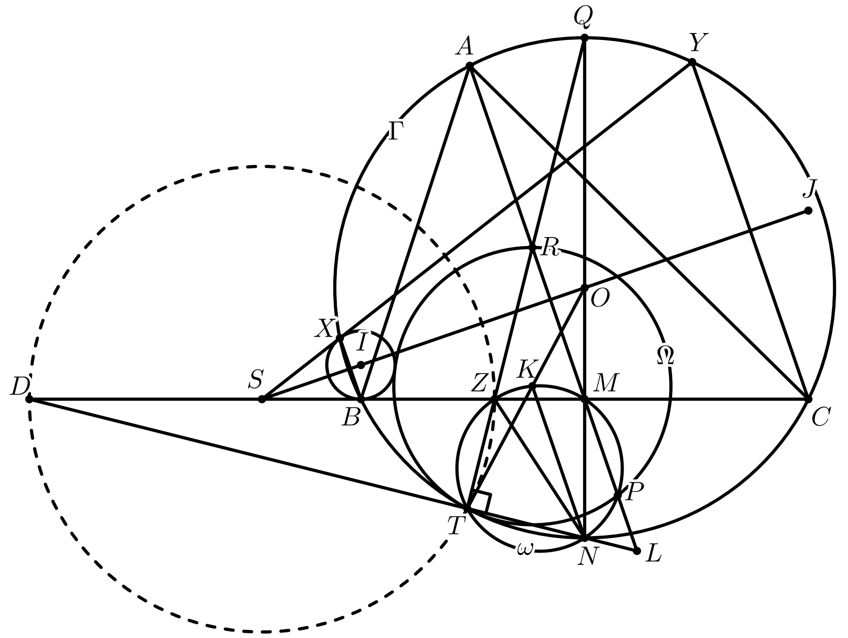


В силу симметрии прямая KY касается ω_1, поэтому прямая XY — это поляра точки K относительно ω_1. Поскольку P лежит на прямой XY, то поляра точки P проходит через K. Также она проходит через точку A, поэтому AK является полярой точки P относительно ω_1, откуда PN касается ω_1. Аналогично, PM касается ω_2. Таким образом, точки A, B, M и N лежат на окружности с центром в точке P, $\angle AMB = \angle ANB = 90°$. Пусть A' и B' — точки, диаметрально противоположные точкам A и B в окружностях ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая BN проходит через точку A', прямая AM проходит через точку B'. Заметим, что $AA'B'B$ — трапеция, а точки O_1 и O_2 являются серединами её оснований. Но тогда прямые $A'B$, $B'A$ и O_1O_2 пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

4. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Γ. Точка M — середина отрезка BC, точка N — середина дуги $\widehat{BC}$ окружности Γ (не содержащей точку A). На Γ выбраны такие точки X и Y, что $BX \parallel CY \parallel AM$. На отрезке BC нашлась такая точка Z, что описанная окружность треугольника XYZ касается прямой BC. Обозначим описанную окружность треугольника ZMN через ω. Прямая AM вторично пересекает ω в точке P. Точка K на ω такова, что $KN \parallel AM$. Обозначим через ω_b окружность, проходящую через точки B, X и касающуюся прямой BC, а через ω_c — окружность, проходящую через точки C, Y и касающуюся прямой BC. Докажите, что окружность с центром в точке K и радиусом KP касается 3 окружностей: ω_b, ω_c и Γ.

(Tran Quan – Vietnam)

Решение. Обозначим через I, J и O центры окружностей ω_b, ω_c и Γ соответственно. Легко видеть, что I, J и O лежат на одной прямой (серединном перпендикуляре к отрезку CY). Обозначим через S точку пересечения прямых IJ и BC. Поскольку точки X и Y симметричны точкам B и C относительно прямой IJ, то точки S, X и Y лежат на одной прямой. Пусть T — такая точка на $\widehat{BC}$ окружности Γ (не содержащей точку A), что прямая ST касается Γ. Пусть прямая TZ вторично пересекает Γ в точке Q.



Поскольку
$$ST^2 = SX \cdot SY = SZ^2,$$
то ZT является биссектрисой угла BTC, поэтому Q является серединой $\widehat{BAC}$ окружности Γ. Отсюда $ZT \perp NT$, то есть T лежит на ω. Пусть прямые AM и TQ пересекаются в точке R, и Ω — описанная окружность треугольника RTP. Так как
$$\angle RPT = \angle MPT = \angle SZT = \angle STR,$$
то прямая ST касается Ω. Таким образом, Ω касается Γ в точке T. Докажем, что K является центром Ω. Далее
$$\begin{cases} SOMT \text{ вписан} \implies \angle OSM = \angle OTM \\ OS \perp AM \text{ и } MS \perp OM \implies \angle OMA = \angle OSM = \angle OTM \\ \angle OTQ = \angle OQT \end{cases}$$
Откуда
$$\angle MTR = \angle OTQ + \angle OTM = \angle OQT + \angle OMA = \angle MRT,$$
то есть $MR = MT$. Пусть прямые AM и TN пересекаются в точке L. Поскольку треугольник RTL прямоугольный с прямым углом T, то точка M является серединой отрезка RL.
$$\begin{aligned} KN \parallel ML &\implies \angle MTN = \angle MLT = \angle KNT \\ &\implies KM \parallel TN \\ &\implies KM \perp RT \end{aligned}$$
Таким образом, MK является серединным перпендикуляром к отрезку RT. Заметим, что
$$\angle ZPR = \angle ZTM = \angle ZRP \implies ZR = ZP.$$

Поскольку ZN является диаметром ω, то

$$ZK \perp KN \implies ZK \perp RP.$$

Следовательно, ZK является серединным перпендикуляром к отрезку RP. Отсюда K является центром Ω.

Докажем, что Ω касается ω_b и ω_c. Обозначим через D точку пересечения прямых TN и BC, а через (S, SZ) — окружность с центром в точке S и радиусом SZ. Так как TZ — биссектриса угла BTC, то TD — внешняя биссектриса того же угла. Тогда $(DZ, BC) = -1$. Поскольку M — середина BC, то

$$MB^2 = MZ \cdot MD,$$

из чего вытекает, что M лежит на радикальной оси окружностей ω_b и (S, SZ). Так как $MA \perp SI$, то MA — радикальная ось окружностей ω_b и (S, SZ). Таким образом, степень точки R относительно окружностей ω_b и (S, SZ) одинакова. При инверсии с центром в точке R и радиусом

$$r = \sqrt{RZ \cdot RT},$$

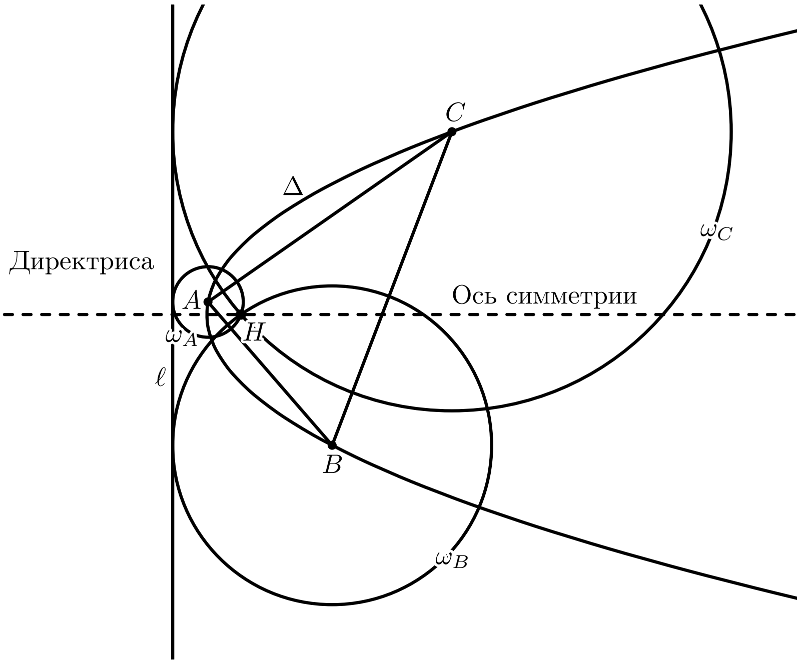
окружность Ω переходит в прямую $ZM \equiv BC$, а ω_b переходит в себя. Поскольку ω_b касается прямой BC, то и Ω касается ω_b.

Аналогично Ω касается ω_c, что и требовалось доказать.

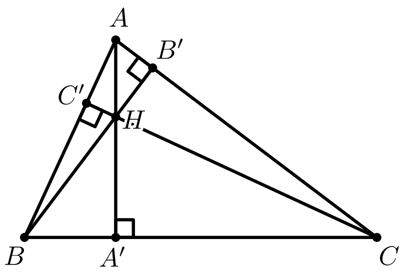
5. Дана парабола Δ с фокусом H. На Δ выбираются точки A, B и C такие, что ортоцентр треугольника ABC совпадает с точкой H. Докажите, что у всех таких треугольников ABC одинаковый радиус вписанной окружности.

(Mahdi Etesamifard)

Решение. Поскольку H — фокус Δ, то окружности $w_A = (A, AH)$, $w_B = (B, BH)$ и $w_C = (C, CH)$ касаются директрисы ℓ параболы Δ.



Теперь рассмотрим треугольник ABC.



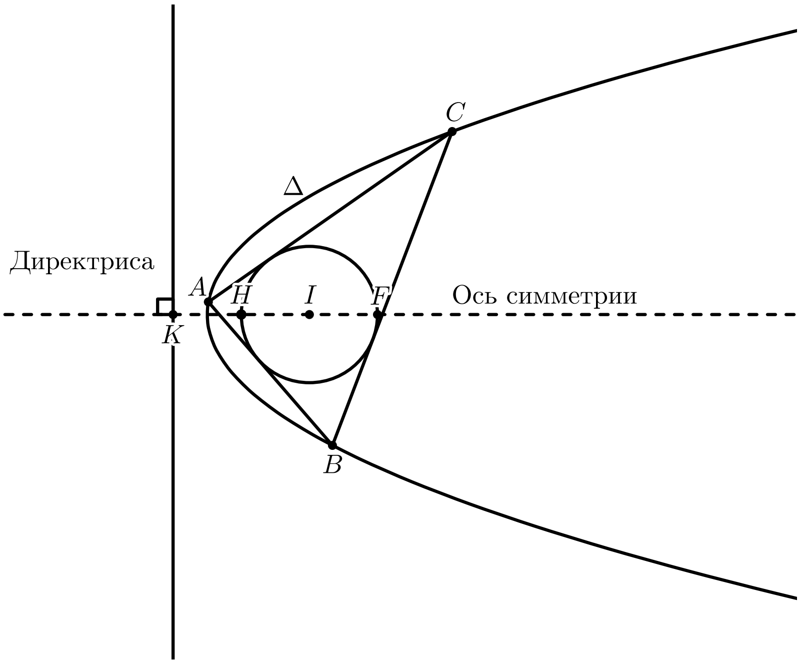
Известно, что

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = t.$$

Также

$$\left.\begin{array}{l} HA = 2R\cos A \\ HA' = 2R\cos B\cos C \end{array}\right\} \implies t = 4R^2\cos A\cos B\cos C. \tag{8}$$

При инверсии с центром в точке H и радиусом $-2t$, окружности w_A, w_B и w_C переходят в прямые BC, AC и AB соответственно. При этой инверсии прямая ℓ переходит во вписанную окружность треугольника ABC. Таким образом, $IH \perp \ell$, то есть точка I лежит на оси симметрии Δ. Также точка H лежит на вписанной окружности треугольника ABC, следовательно, $HI = r$.



Как известно,

$$
\begin{aligned}
&HI^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C \\
\implies\ &r^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C \\
\implies\ &r^2 = 4R^2 \cos A \cos B \cos C
\end{aligned}
$$

Исходя из (8), получаем, что $r^2 = t = HA \cdot HA'$. Точки K и F инверсны, поэтому

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HF} = -2t = -2r^2 \implies HK = r.$$

Поскольку длина отрезка HK фиксирована, то и радиус вписанной окружности треугольника ABC фиксирован.