

Угол в квадрате

Речь пойдет об удивительной геометрической конструкции, возникшей на основе ряда задач замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова.

С одной из этих задач мы уже встречались, причем не один раз.

Задача. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° (см. рис. 1). Докажите, что расстояние от точки A до прямой MN равно стороне квадрата.

Разберем три способа решения этой задачи (последний способ – авторский).

Решение. Проведем отрезок MN и опустим на него перпендикуляр AE (см. рис. 1 а – в).

Первый способ. Проведем диагональ AC квадрата и рассмотрим треугольник CMN (см. рис. 1а). Точка A лежит на биссектрисе угла C этого треугольника и $\angle MAN = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$, следовательно, точка A является центром вневписанной окружности треугольника CMN . Тогда $AE = AB = AD$ (радиусы этой окружности).

Второй способ. Рассмотрим поворот с центром A на угол 90° против часовой стрелки. Образом вершины D будет являться вершина B , образом прямой DC – прямая BC' , ей перпендикулярная, поэтому точка N' (образ точки N) будет лежать на отрезке BC' (см. рис. 1б). Так как $\angle NAN' = 90^\circ$, то $\angle MAN' = \angle MAN$, значит, треугольник AMN' равен треугольнику AMN (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, равны и их соответствующие высоты, то есть $AE = AB$.

Третий способ. «Перегибем» квадрат по прямым AM и AN . Так как $\angle BAM + \angle DAN = \angle MAN$ и $AB = AD$, то после таких перегибов отрезки AB и AD совместятся (см. рис. 1в). Кроме того, $\angle ABM = \angle ADN = 90^\circ$, значит из точки, в которой оказались вершины B и D , отрезки AM и AN видны под прямым углом, а этому условию удовлетворяет только точка E . Значит, $AE = AB = AD$.

Этот авторский прием, конечно, имеет и «научное» обоснование. Он основан на том, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворотом на удвоенный угол между осями с центром в точке их пересечения. В данном случае речь идет о повороте с центром A на угол 90° , который является композицией симметрий относительно прямых AM и AN .

Задачи для самостоятельного решения

1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Докажите, что периметр треугольника CMN равен половине периметра квадрата тогда и только тогда, когда угол MAN равен 45° .
2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° . Диагональ BD пересекает AM и AN в точках P и Q соответственно. Докажите, что: а) точки A, B, M, Q (равно как и точки A, D, N, P) лежат на одной окружности; б) общая хорда этих окружностей перпендикулярна MN ; в) отрезки MQ, NP и

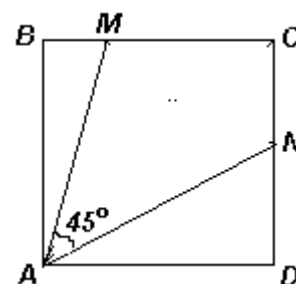


Рис. 1

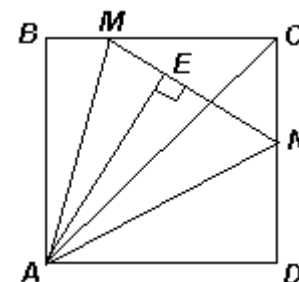


Рис. 1а

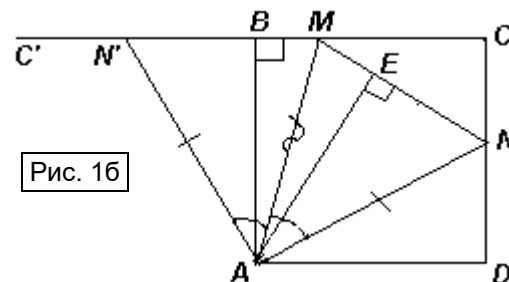


Рис. 1б

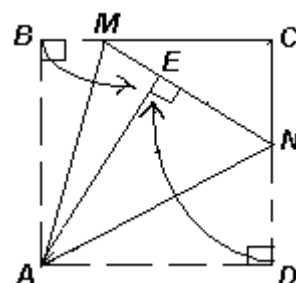


Рис. 1в

AE , где E – основание перпендикуляра, опущенного из A на MN , пересекаются в одной точке H ; г) четырехугольник $PQNM$ – вписанный; ä) $S_{\triangle MAN} = 2S_{\triangle PAQ}$; е) $AH = MN = PQ\sqrt{2}$.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° . Лучи AM и AN пересекают описанную окружность квадрата в точках M_1 и N_1 соответственно. Докажите, что $M_1N_1 \parallel MN$.

4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике BAD на гипотенузе BD выбраны точки P и Q так, что $\angle PAQ = 45^\circ$ (P лежит между B и Q). Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + DQ^2$.

5. Внеписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается продолжений его катетов CA и CB в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника ABC пересекает A_1B_1 в точках P и Q . Найдите угол PCQ .

6. а) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° . Докажите, что центр описанной окружности треугольника MAN лежит на диагонали AC . б) Окружность с центром на диагонали AC квадрата $ABCD$ проходит через вершину A и пересекает стороны BC и CD в точках M и N , не симметричных относительно AC . Докажите, что угол MAN равен 45° .

7. На сторонах AB , BC , CD и AD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки K , M , N и L так, что $\angle KMA = \angle MAN = \angle LNA = 45^\circ$. а) Докажите, что точки A , K , M , N и L лежат на одной окружности. б) Пусть KL пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что $S_{\triangle KMF} + S_{\triangle LNG} = S_{\triangle FAG}$.

8. Вершины ломаной $KMANL$ лежат на окружности и $\angle KMA = \angle MAN = \angle ANL = 45^\circ$. Докажите, что: а) площадь закрашенной части равна половине площади круга (см. рисунок); б) $KM^2 + AN^2 = AM^2 + LN^2$.

9. Внутри квадрата $ABCD$ выбраны точки S и T так, что $\angle SAT = \angle SCT = 45^\circ$. Докажите, что $BS \parallel DT$.

