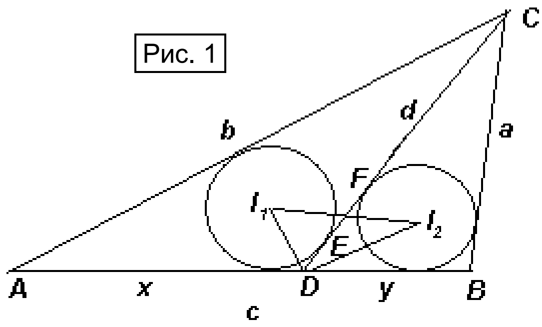
18.02.20

Три вписанные окружности в треугольнике

Использован материал статьи А. Блинков, Ю. Блинков. Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике ... , «Квант», №2/2012.

Продолжим рассматривать геометрическую конфигурацию, которая получается, если чевианой разбить треугольник на два треугольника и вписать в эти треугольники окружности (см. рис. 1). На прошлом занятии мы выяснили ряд свойств этой конфигурации, в частности, научились находить расстояния между точками касания окружностей с отрезком CD, а также решили еще ряд задач.



Сегодня вам будет предложена цепочка задач, в которой к этим двум окружностям добавится третья – окружность, вписанная в треугольник ABC.

Начиная с задачи 3, рекомендуется решать по порядку номеров!

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

Во всех задачах, кроме 5 и 6. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Пусть I, I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACD и BCD соответственно, r, r_1 и r_2 – их радиусы, а L, M и K – точки касания этих окружностей со стороной AB.

1. Пусть $CD\perp AB$ и $\angle ACB = 90°$. Докажите, что: а) $r_1 + r_2 + r = CD$; б) $I_1I_2 = r\sqrt{2}$.

2. Докажите, что $r_1 + r_2 > r$.

3. Докажите, что: а) $ML = DK$; б) окружности с центрами I_1 и I_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и L совпадают.

4. Докажите, что точки I_1, L, D и I_2 лежат на одной окружности.

5. В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E, лежащей на боковой стороне BC. Эти биссектрисы разбивают трапецию на три треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Одна из этих окружностей касается основания AB в точке K, а две другие касаются биссектрисы DE в точках M и N. Докажите, что $BK = MN$.

6. Зафиксированы две окружности ω_1 и ω_2, одна их внешняя касательная n и одна их внутренняя касательная m. На прямой m выбирается точка X, а на прямой n строятся точки Y и Z так, что XY и XZ касаются ω_1 и ω_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ, лежат на одной прямой.

7. Пусть $CD\perp AB$. Докажите, что: а) $I_1L = I_2L$; б) вершина P квадрата I_1LI_2P лежит на прямой CD.

8. Пусть $CD\perp AB$ и $\angle ACB = 90°$. Докажите, что:
а) точка P – центр окружности, описанной около треугольника I_1CI_2; б) $I_1L\perp AC$ и $I_2L\perp BC$;
в) $I_1L = IL = I_2L$; г) точки A, I_1, I_2 и B лежат на одной окружности.

9. Пусть $CD\perp AB$. Докажите, что: а) $\angle ACB = 90°$ тогда и только тогда, когда $r^2 = r_1^2 + r_2^2$;
б) $\angle ACB > 90°$ тогда и только тогда, когда $r^2 < r_1^2 + r_2^2$.