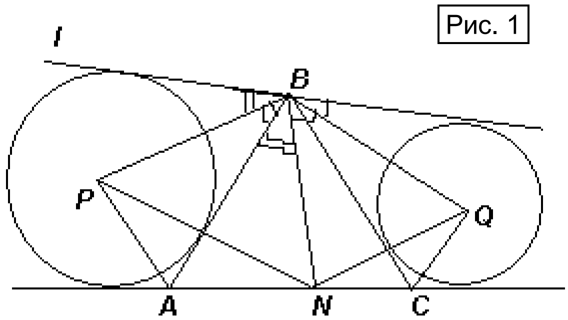
Равносторонний треугольник и две окружности

Основу этого занятия составляет цепочка задач, связанная с одной и той же геометрической конфигурацией.

Через вершину *B* равностороннего треугольника *ABC* проведена прямая *l*, не пересекающая сторону *AC*. Вне треугольника проведены две окружности с центрами *P* и *Q*: одна из них касается стороны *BC*, прямых *l* и *AC*, а другая касается стороны *BA*, прямых *l* и *AC* (см. рис. 1).

Основной факт, который можно будет использовать при решении задач: ***треугольник PBQ – равнобедренный***. Докажем это.

Рис. 1



Доказательство. Проведем луч *BN*, симметричный лучу *BP* относительно прямой *AB*, тогда ∠*NBA* = ∠*ĐBÀ* (точка *N* лежит на отрезке *AC*). Так как *AP* – биссектриса внешнего угла треугольника *ABC*, который равен 120°, то ∠*BAP* = 60° = ∠*BÀN.* Значит, треугольники *BAP* и *BÀN* равны (по стороне и прилежащим углам), поэтому *BP* = *BN*.

Заметим теперь, что сумма углов, образованных прямой *l* со сторонами *AB* и *BC* (вне данного треугольника) равна 120°, значит, сумма их половин равна 60°. Следовательно, $\angle NBC = \angle QBC$. Тогда, рассуждая аналогично вышеизложенному, получим равенство треугольников *BCN* и *BCQ*, откуда *BQ* = *BN*. Таким образом, *BP* = *BQ*, то есть треугольник *BPQ* – равнобедренный.

В итоге, точка Q является образом точки P при повороте на 120°, а в процессе решения этот поворот представлен в виде композиции двух осевых симметрий.

Другие свойства этой конфигурации вы получите в процессе самостоятельного решения задач. Рекомендуется их решать примерно в той последовательности, которая предложена.

Советую также обратить внимание на еще одну симметрию: прямые l и AC симметричны относительно прямой PQ – линии центров данных окружностей.

К рассмотренной конфигурации относятся первые 8 задач. Те из вас, кто с ними справятся, могут решить еще три задачи, также связанные с равносторонним треугольником и окружностями.

Задачи для самостоятельного решения

Через вершину *B* равностороннего треугольника *ABC* проведена прямая *l*, не пересекающая сторону *AC*. Вне треугольника проведены две окружности: окружность с центром *P* касается стороны *BA* в точке A_1, а также прямых *l* и *AC*, а окружность с центром *Q* касается стороны *BC* в точке C_1, а также прямых *l* и *AC*. Докажите, что:

1) Прямые PA_1, QC_1 и *AC* пересекаются в одной точке.

2) Описанная окружность треугольника A_1BC_1 проходит через середину стороны *AC*.

3) Центр окружности, описанной около треугольника *PBQ*, лежит на стороне *AC*.

4) Пусть *N* – точка пересечения прямых PA_1 и QC_1, *O* – центр окружности, описанной около треугольника *PBQ*. Тогда точки *P*, *Q*, *N* и *O* лежат на одной окружности.

5) Ортоцентр треугольника A_1BC_1 лежит на прямой *PQ*.

6) Пусть прямая *PQ* пересекает *AB* и *BC* в точках *A*’ и *C*’ соответственно. Тогда центр окружности, описанной около треугольника *A*’*BC*’, лежит на отрезке *BN*.

7) Пусть описанная окружность треугольника *PBQ* пересекает прямую *l* в точке *T*. Тогда точка *T* лежит на окружности, описанной около треугольника *A*’*BC*’.

8) а) Докажите, что высота треугольника *ABC* равна сумме радиусов данных окружностей.
б) Обобщите этот результат для случая, когда треугольник *ABC* – равнобедренный (*AB* = *BC*).

9. На дуге *BC* окружности, описанной около равностороннего треугольника *ABC*, отмечена точка *P*. Отрезки *AP* и *BC* пересекаются в точке *Q*. Докажите, что $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

10. Дан равносторонний треугольник *ABC* с центром *O*. Прямая, проходящая через вершину *C*, пересекает описанную окружность треугольника *AOB* в точках *D* и *E*. Докажите, что точки *A*, *O* и середины отрезков *BD* и *BE* лежат на одной окружности.

11. Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через три заданные точки *A*, *B* и *C* (*на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек*).