Разностные треугольники

<u>Определение</u>. Треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, называется ***разностным***.

Такие треугольники обладают рядом интересных свойств, которые мы и рассмотрим. Пусть в треугольнике *ABC*: $b=\frac{a+c}{2}$ (*a* ≤ *b* ≤ *c*), *I* – центр вписанной окружности, *W* – точка пересечения луча *BI* и окружности, описанной около треугольника *ABC* (см. рис. 1). Тогда: 1) *BI* = *IW*; 2) $r = \frac{1}{3}h_b$.

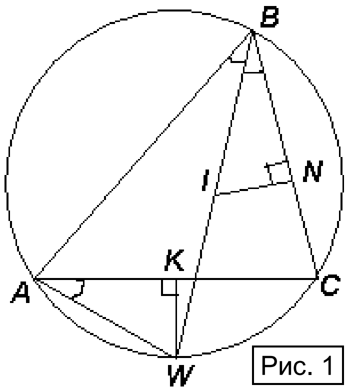

Рис. 1

Доказательство. 1) Опустим из точки *I* перпендикуляр *IN* на сторону *BC*, а из точки *W* – перпендикуляр *WK* на сторону *AC*. Так как *N* — точка касания стороны треугольника и вписанной окружности, то $BN = p - b = \frac{1}{2}b = AK$. Кроме того, ∠*CBW* = ∠*CAW*. Тогда Δ*BIN* = Δ*AWK* (по катету и острому углу), следовательно, *BI* = *AW*. По теореме «трилистника» *WA* = *WI*, то есть *BI* = *IW*; что и требовалось.

2) $r=\frac{S}{p}=\frac{bh_b}{a+b+c}=\frac{bh_b}{3b}=\frac{1}{3}h_b$

Являются ли доказанные утверждения признаками ***разностного*** треугольника?

[**Да**; 1) равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу;

2) $b=\frac{2S}{h_b}=\frac{(a+b+c)r}{h_b}=\frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow b=\frac{a+c}{2}$]

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что треугольник *ABC* является разностным тогда и только тогда, когда:

а) прямая *IM*, где *M* – центроид (точка пересечения медиан) треугольника, параллельна стороне *AC*;

б) сторона *AC* пересекает отрезок *IW* в его середине;

в) середина стороны *AC* и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой же стороны и вписанной окружности;

г) высота треугольника равна радиусу вневписанной окружности, касающейся той стороны, к которой проведена высота;

д) точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведенной к этой же стороне.

2. Среди прямоугольных треугольников укажите все, являющиеся разностными, и докажите, что разностью арифметической прогрессии (*a*; *b*; *c*) является радиус *r* вписанной в этот треугольник окружности.

3. Докажите, что в разностном треугольнике *ABC*: а) вершина *B*, центры *O* и *I* описанной и вписанной окружностей и середины сторон *AB* и *BC* лежат на одной окружности; б) прямая *IM*, где *M* – центроид треугольника, является касательной к этой окружности.

4. В египетском треугольнике *ABC* (угол *C* – прямой, *BC* – меньший катет) найдите угол *BOI* (точки *O* и *I* – центры описанной и вписанной окружностей соответственно).

5. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите расстояние от центроида до центра вписанной окружности.

6. Докажите, что в разностном треугольнике *ABC* центр *I* вписанной окружности является центром окружности, описанном около треугольника *A*'*LC*', где *L* – основание биссектрисы, проведенной из вершины *B*, *A*' и *C*' – середины сторон *BC* и *AB* соответственно.

7. В разностном треугольнике ABC продолжение биссектрисы BL пересекает описанную окружность в точке W, T – основание перпендикуляра, опущенного из точки W на сторону AB. Докажите, что: а) $BT = AC$; б) $AL = \frac{1}{2}AB$.

8. Докажите, что треугольник ABC является разностным тогда и только тогда, когда:
а) сумма расстояний от произвольной точки его биссектрисы, проведенной к средней стороне, до всех сторон равна одной из высот; б) он не является равнобедренным и центр его вписанной окружности равноудален от середин двух сторон.

9. Докажите, что стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда котангенсы его половинных углов составляют арифметическую прогрессию.

10. Докажите, что в разностном треугольнике средний по величине угол не больше, чем $60°$.