25.02.20

Теорема и неравенство Птолемея

Сегодняшнее занятие будет посвящено теореме Птолемея и неравенству Птолемея.
1) Вспомним ***теорему Птолемея*** и план ее стандартного доказательства.

Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений его противолежащих сторон равна произведению его диагоналей .

То есть, если *ABCD* – вписанный четырехугольник, то $|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD| = |AC|\cdot|BD|$. Для доказательства обычно рассматривают такую точку *M* на диагонали *BD*, что $\angle DCM = \angle ACB$ (см. рис. 1а). Затем, учитывая равенство вписанных углов, используют две пары подобных треугольников: $\Delta ABC \sim \Delta DMC$ и $\Delta ACD \sim \Delta BCM$.

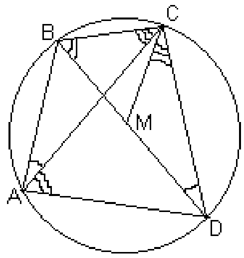

Рис. 1а

Существуют и другие способы доказательства этой теоремы, например, использующие прямую Симсона или теорему косинусов, либо теорему синусов.

2) Обобщением теоремы Птолемея является ***неравенство Птолемея***, которое формулируется следующим образом: ***в любом четырехугольнике ABCD*** (в том числе, и в невыпуклом или «вырожденном») $\boldsymbol{AB\cdot CD + BC\cdot AD \geq AC\cdot BD}$.

Доказательство. Пусть точки *B*', *C*' и *D*' лежат на лучах *AB*, *AC* и *AD*, причем $AB' = \frac{1}{AB}$, $AC' = \frac{1}{AC}$ и $AD' = \frac{1}{AD}$ (см. рис. 1б). Тогда $\frac{AB'}{AC} = \frac{1}{AB\cdot AC} = \frac{AC'}{AB}$, значит, $\Delta AB'C' \sim \Delta ACB$ (по II пр.). Следовательно, $B'C' = \frac{BC}{AB\cdot AC}$. Аналогично,

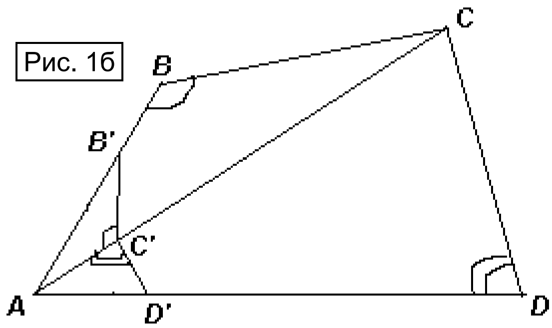

Рис. 1б

из подобия треугольников *AC*'*D*' и *ADC* получим, что $C'D' = \frac{CD}{AC\cdot AD}$, а из подобия треугольников . *AB*'*D*' и *ABD* получим, что $B'D' = \frac{BD}{AB\cdot AD}$.

По неравенству треугольника $B'C' + C'D' \geq B'D'$. Подставив полученные выражения в это неравенство и освободившись от знаменателя, получим требуемое.

Выясним, когда достигается равенство. Равенство достигается тогда и только тогда, когда точки *B*', *C*' и *D*' лежат на одной прямой, то есть $\angle B'C'A + \angle D'C'A = 180°$. Это равносильно тому, что сумма углов *B* и *D* данного четырехугольника равна 180°, то есть *ABCD* – вписанный.

Это же доказательство можно изложить короче, если использовать ***инверсию****. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром A радиуса R. Образами точек B, C и D будут точки B', C' и D', лежащие на лучах AB, AC и AD соответственно, причем* $AB'\cdot AB = AC'\cdot AC = AD'\cdot AD = R^2$. *Отсюда сразу получаем равенство* $\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB}$ *и два других, ему аналогичных. Далее – по тексту.*

Более того, подобие треугольников можно получить, используя не определение инверсии, а ее свойство. Оно следует из антипараллельности соответствующих отрезков.

Задачи для самостоятельного решения

1. (*Задача Птолемея*) В треугольнике *ABC*: *BC* = *a*, *AC* = *b*. Найдите *AB*, если радиус окружности, описанной около *ABC*, равен *R*.

2. Биссектриса угла *A* треугольника *ABC* пересекает описанную около него окружность в точке *W*. а) Выразите отношение $\frac{AW}{IW}$ через длины сторон треугольника (*I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*). б) Докажите, что $AW > \frac{AB + AC}{2}$.

3. Точка *M* лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника *ABC*.
а) (*теорема Помпею*) Докажите, что сумма расстояний от *M* до двух вершин треугольника равна расстоянию от *M* до третьей вершины.
б) Укажите все такие точки *X* плоскости, что из отрезков *XA*, *XB* и *XC* можно составить треугольник.

4. Сумма расстояний от точки *X*, выбранной вне квадрата, до двух его ближайших соседних вершин равна *m*. Найдите наибольшее значение суммы расстояний от *X* до двух других вершин квадрата.

5. Точки *A*, *B*, *C* и *D* – четыре последовательные вершины правильного семиугольника. Докажите, что: а) $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$; б) $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$.

6. В выпуклом шестиугольнике *ABCDEF*: *AB* = *BC* = *a*, *CD* = *DE* = *b*, *EF* = *FA* = *c*. Докажите, что $\frac{a}{BE} + \frac{b}{AD} + \frac{c}{CF} \geq \frac{3}{2}$.

7. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность, *I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABD*. Найдите наименьшее значение *BD*, если *AI* = *BC* = *CD* = 2.

8. В остроугольном треугольнике *ABC* d_1, d_2 и d_3 – расстояния от центра *O* описанной окружности до сторон. Докажите, что $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$, где *R* и *r* – радиусы описанной и вписанной окружностей данного треугольника.

9. Дан вписанный четырёхугольник, острый угол между диагоналями которого равен φ. Докажите, что острый угол между диагоналями любого другого четырёхугольника с теми же длинами сторон, идущими в том же порядке, меньше, чем φ.

10. Найдите диагонали вписанного четырехугольника, если даны *a*, *b*, *c* и *d* – длины его сторон; идущих подряд.