

Прямая Симсона

Использованы материалы занятия, разработанного Д.В. Швецовым: <http://geometry.ru/persons/shvetsov/Simson1problems.pdf>.

На этом занятии мы рассмотрим ряд задач, которые эффективно решаются, если использовать **прямую Симсона**. Напомню **теорему** об этой прямой.

Теорема. Основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника (или их продолжения) из точки, лежащей на описанной около этого треугольника окружности, лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть точки M , K и L – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AC , AB и BC соответственно (см. рис. 1). Докажем, что углы PKM и DKL – смежные. Действительно, четырехугольники $AMKP$, $PKBL$ и $APBC$ – вписанные. Следовательно, $\angle PKM = 180^\circ - \angle PAC$, а $\angle PKL = \angle PBL = \angle PAC$.

Для того, чтобы не рассматривать различные случаи расположения точек K , L и M можно использовать ориентированные углы.

Существует и другой способ доказательства, использующий подобие треугольников и теорему Менелая (он изложен, например, в учебнике Геометрия 8-9 под ред. А.Д. Александрова).

Умение работать с прямой Симсона помогает при решении ряда задач, в которых требуется доказать, что три точки лежат на одной прямой. Основная идея будет понятна при разборе следующей задачи.

Пример. В треугольнике ABC проведены высота BH и биссектриса BL . Точки P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из A на BL и из L на BC соответственно. Докажите, что точки H , P и Q лежат на одной прямой (см. рис. 2).

Решение. Заметим, что точки H , P и Q – это основания перпендикуляров, опущенных из точки L на прямые BH , AP и BC соответственно. Поэтому достаточно доказать, что L лежит на окружности, описанной около треугольника, образованного этими прямыми. Это треугольник BDE , где D и E – точки пересечения прямой AP с BH и BC соответственно.

Действительно, точки A и E симметричны относительно BL , значит, $\angle LAP = \angle LEP$. Кроме того, $\angle LAP = 90^\circ - \angle BLA = \angle LBD$. Следовательно, $\angle LED = \angle LBD$, то есть точки L , D , B и E лежат на одной окружности.

В некоторых случаях перпендикуляры, которые надо увидеть, чтобы распознать прямую Симсона, «спрятаны» в виде середин отрезков или точек касания прямых и окружностей. Итак, серия задач: «Увидеть и использовать прямую Симсона».

Задачи для самостоятельного решения

1. Окружность с центром I , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках C_0 и A_0 соответственно. Окружность, проходящая через точки B и I , пересекает стороны AB и BC в точках X и Y . Докажите, что середина отрезка XY лежит на прямой A_0C_0 .

2. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D . Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C . Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0 , где C_0 и A_0 – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB и BC .

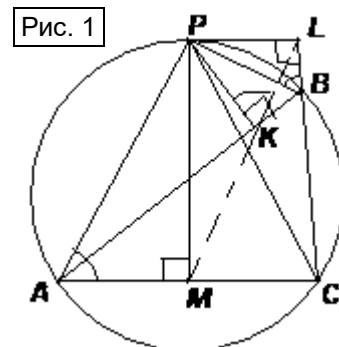


Рис. 1

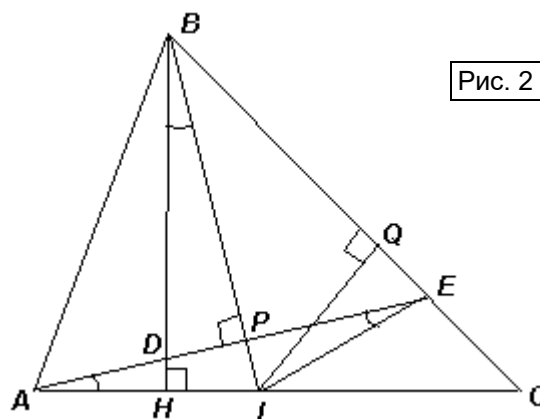


Рис. 2

3. На биссектрисе угла ABC зафиксирована точка F . Рассматриваются равнобедренные треугольники A_1FC_1 , где точки A_1 и C_1 лежат на лучах BA и BC соответственно. Найдите геометрическое место середин их оснований A_1C_1 .
4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AE . Радиус OE описанной окружности треугольника AEC пересекает биссектрису угла ACB в точке L . Докажите, что L лежит на средней линии треугольника AEC .
5. Окружность, центр которой лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC треугольника ABC , касается стороны BC в точке A_0 , а продолжения стороны AB заточку B – в точке C_0 . Докажите, что прямая A_0C_0 проходит через середину стороны AC .
6. В треугольнике ABC угол B равен 60° . Пусть AA_1 и CC_1 – биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине B относительно прямой A_1C_1 , лежит на стороне AC .
7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Из точки D опущены перпендикуляры DB' и DC' на прямые AC и AB . На прямой $B'C'$ отмечена точка M так, что $MD \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_0 треугольника ABC .
8. Окружность с центром I , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и CA в точках C' , A' и B' соответственно. Медиана AA_0 треугольника ABC пересекает $B'C'$ в точке D . Докажите, что точка I лежит на прямой DA' .
9. Окружность с центром I , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и CA в точках C' , A' и B' соответственно. AL – биссектриса треугольника ABC , D – точка пересечения прямых $A'I$ и $B'C'$. Докажите, что $DL \parallel AA'$.
10. Окружность с центром I , вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и CA в точках C' , A' и B' соответственно. Точка B_1 симметрична точке B' относительно прямой $A'C'$, а точка B_2 является пересечением прямых BB_1 и AC . Аналогично определяются точки A_2 и C_2 . Докажите, что точки A_2 , B_2 и C_2 лежат на прямой, проходящей через центр описанной окружности треугольника ABC .