

Ортогональные окружности

На этом занятии мы рассмотрим интересный частный случай взаимного расположения двух окружностей.

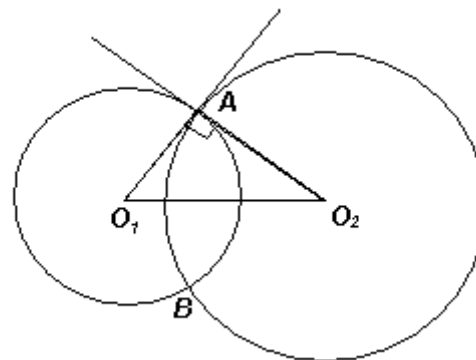
Определение. *Две пересекающиеся окружности называются ортогональными, если касательные к ним в точке их пересечения – взаимно перпендикулярны* (см. рисунок).

Эти окружности играют особую роль в **инверсии**, которой некоторые из вас уже занимались.

Следствия из определения.

- 1) Угол между касательными не зависит от выбора точки пересечения;
- 2) касательная к одной из ортогональных окружностей проходит через центр другой (то есть отрезок касательной к одной окружности является радиусом другой);
- 3) две окружности ортогональны m и m , когда их радиусы и расстояние d между центрами связаны соотношением: $d^2 = R^2 + r^2$.
- 4) две окружности ортогональны m и m , когда их центры и точки пересечения лежат на одной окружности.

Ортогональные окружности обладают еще рядом интересных геометрических свойств, которые вы осмыслите при решении задач.



Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB ортогональны окружности, описанные около треугольников: а) ACH и BCH , где H – основание высоты, опущенной на AB ; б) ACD и BCD , где D – произвольная точка отрезка AB .
2. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 , H – ортоцентр треугольника. Окружность ω_1 проходит через точки A , B_1 и C_1 , а окружность ω_2 проходит через точки B , C и B_1 . а) Докажите, что окружности ω_1 и ω_2 ортогональны. б) Используя доказанную ортогональность окружностей, докажите теорему об окружности девяти точек. в) Используя доказанную ортогональность окружностей, докажите, что $AH^2 = 4R^2 - a^2$ (R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC , $a = BC$).
3. Две ортогональные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Точка H лежит на окружности ω_1 внутри окружности ω_2 . Лучи AH и BH пересекают окружность ω_2 в точках C и D соответственно. Докажите, что: а) CD – диаметр окружности ω_2 ; б) точка M пересечения прямых BC и AD лежит на окружности ω_1 ; в) точка H – ортоцентр треугольника MCD ; г) центр O_1 окружности ω_1 лежит на высоте треугольника MCD .
4. Даны не концентрические окружности ω_1 и ω_2 . Найдите геометрическое место центров окружностей ω , ортогональных каждой из данных окружностей. (При ответе учтите различные возможности взаимного расположения двух данных окружностей.)
5. В треугольнике ABC проведена высота AA_1 . Точки B_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки A_1 на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что: а) касательные к окружности, описанной около треугольника AB_1C_1 , проведенные в точках B_1 и C_1 , пересекаются на прямой, содержащей медиану AM треугольника ABC ; б) касательные к окружности, описанной около треугольника ABC , проведенные в точках B и C , пересекаются на прямой, симметричной AM относительно биссектрисы угла BAC .
6. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A выбрана точка D так, что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 вторично пересекают окружность в точках B_2 и C_2 . Докажите, что B_2C_2 – диаметр окружности.

7. Даны три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой.

а) Постройте окружность, касательные к которой, проведенные из данных точек, имеют длины a , b и c соответственно.

б) Через каждые две из трех данных точек проведите окружность так, чтобы построенные окружности были попарно ортогональны.

8. Дана окружность ω и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.