Непрерывность в геометрии

По книжке А. Блинков, В. Гуровиц. Непрерывность (серия «Школьные математические кружки», –М.: МЦНМО, 2015.

На этом занятии мы рассмотрим задачи, решение которых опирается на понятие ***непрерывности***. Такие задачи находится на стыке комбинаторной и классической геометрии, а идеи, которые будут использованы при решении задач, привнесены из алгебры и математического анализа.

Сформулируем базисные сведения, которые нам понадобятся, и проиллюстрируем их на «картинках»:

1) **Определение**. Функция непрерывна, если при малых изменениях значения аргумента мало изменяется и значение функции.

2) **Теорема о промежуточном значении**. Если функция *f* непрерывна на отрезке и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка существует точка, в которой она принимает значение ноль.

3) **Обобщение этой теоремы**. Если функции *f* и *g* непрерывны на отрезке [*a*; *b*] и на этом отрезке существуют такие две точки, что в одной $f > g$, а в другой $f < g$, то на этом отрезке найдется и точка, в которой $f = g$.

Следствие. Если функция *f* непрерывна на отрезке [*a*; *b*], то она принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

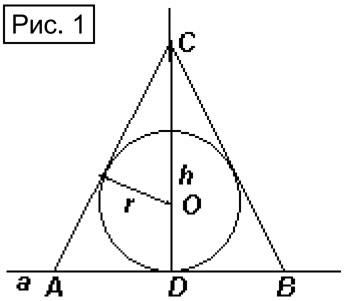
Строго это формулируется и обосновывается в курсе математического анализа, но для наших целей пока достаточно наглядных представлений.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 1. Может ли площадь треугольника быть равна 6?

Ответ: может.

Рис. 1



Решение. Рассмотрим окружность с центром *O* радиуса 1, прямую *a*, которая касается окружности в некоторой точке *D*, и прямую *DO* (см. рис. 1). Так как $DO \perp a$, то выбрав какое-то положение точки *C* на луче *DO* (вне окружности) и проведя через эту точку касательные к окружности, пересекающие прямую *a* в точках *A* и *B*, мы получим равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AB*, в который эта окружность вписана.

Зафиксируем рассмотренную окружность, прямую *a* и точку *D*, и будем «двигать» вершину *C* по лучу *CO*, изменяя расстояние *h* от *C* до *AB* так, чтобы данная окружность оставалась вписанной в равнобедренный треугольник *ABC*. Вершины *A* и *B* в этом случае будут смещаться вдоль прямой *AB* (в противоположных направлениях). При малых изменениях *h* мало изменяется периметр треугольника, а так как $S_{\Delta ABC} = pr$ (где *p* – полупериметр *ABC*), то мало изменяется и его площадь. Таким образом, зависимость $S(h)$ ***является непрерывной функцией***.

Выберем значение *h* так, чтобы треугольник *ABC* был равносторонним, тогда его сторона $b = 2r \cdot tg60^\circ = 2\sqrt{3}$, а площадь $S = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ < 6. Так как $AB > 2$, то, выбрав $h = 6$, получим треугольник, у которого $S > 6$. По ***теореме о промежуточном значении*** найдется такое *h*, для которого $S = 6$, что и требовалось.

Таким образом, для решения задачи: 1) зафиксированы некоторые точки заданной конфигурации, выбрана независимая переменная *h* и показано, каким образом изменяется положение остальных точек в зависимости от *h*; 2) объяснено, почему зависимость *S*(*h*) искомой величины от выбранной переменной является непрерывной функцией; 3) показано существование значений переменной, при которых искомая величина принимает значения как меньше, так и больше искомого; 4) использована теорема о промежуточном значении.

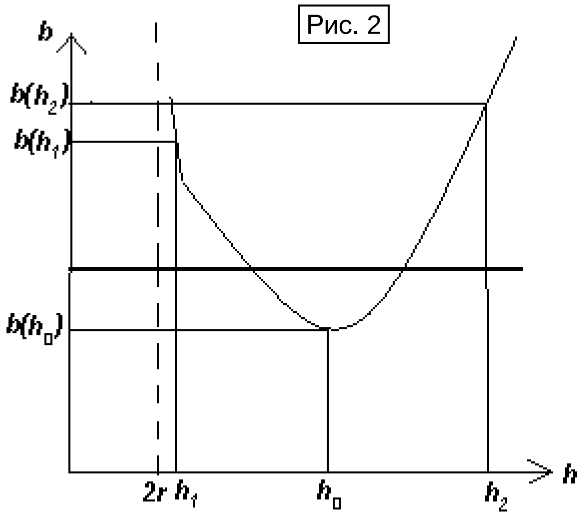
Отметим, что другие способы решения, связанные с поиском параметров искомого треугольника в явном виде, так или иначе приводят к кубическому уравнению, которое невозможно решить «школьными» методами.

Здесь же уместно привести еще одну задачу, связанную с рассмотренной конфигурацией. Для ее решения удобно использовать еще одно *свойство непрерывных функций*: ***функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наименьшего и наибольшего значения.***

Пример 2. У двух равнобедренных треугольников соответственно равны боковые стороны и радиусы вписанных окружностей. Обязательно ли эти треугольники равны?

Ответ: нет, не обязательно.

Конечно можно в явном виде найти два неравных треугольника, удовлетворяющие условию, но это не очень просто.



Решение. Зафиксируем некоторую окружность радиуса r и будем рассматривать равнобедренные треугольники ABC, описанные около этой окружности (см. рис. 1). Такие треугольники однозначно определяются длиной h высоты, опущенной на основание AC.

Величина h при этом может принимать любые значение из интервала $(2r;\ +\infty)$. Рассмотрим зависимость длины боковой стороны b от h. При малых изменениях h мало изменяется и значение b, поэтому $b(h)$ является непрерывной функцией.

Если h стремится к границам выбранного интервала, то в обоих случаях b становится очень большим (стремится к «плюс бесконечности»).

Рассмотрим функцию $b(h)$ на отрезке $[h_1;\ h_2]$, где h_1 чуть больше, чем $2r$, а h_2 достаточно велико. Тогда значение функции $b(h)$ на концах отрезка будет достаточно большим. На этом отрезке функция достигает своих экстремальных значений, причем наибольшее достигается на одном из концов, а наименьшее – в какой-то внутренней точке h_0 (см. рис. 2).

Рассмотрим теперь какое-нибудь фиксированное значение функции, которое немного больше, чем $b(h_0)$. Оно достигается, по крайней мере, при двух различных значениях h.

Следовательно, найдутся хотя бы два неравных равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами и равными радиусами вписанных окружностей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в круге с центром O можно провести хорду AB так, что площадь треугольника AOB равна площади сегмента, отсекаемого этой хордой.

2. Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5?

3. а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника так, чтобы окружности, вписанные в получившиеся треугольники, были равны. б) Останется ли утверждение верным, если вписанные окружности заменить на описанные?

4. Существует ли выпуклый четырехугольник и точка P внутри него такие, что сумма расстояний от P до вершин равна периметру четырехугольника?

5. Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из его диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна: а) 1001; б) 2?

6. Существует ли неравносторонний треугольник, в котором наименьшая медиана равна наибольшей высоте?

7. Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

8. а) Дан шарнирный четырехугольник (длины его сторон и их порядок – зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое положение этого четырехугольника, при котором он вписан в окружность.

б) Докажите, что среди всех шарнирных многоугольников с фиксированными сторонами (и порядком сторон), вписанный многоугольник имеет наибольшую площадь.

9. Через точку *O* пересечения диагоналей четырехугольника *ABCD* проведена произвольная прямая, пересекающая стороны *AD* и *BC* в точках *K* и *M* соответственно. Докажите, что длина отрезка *MK* не превосходит наибольшей из диагоналей четырехугольника.