Две вписанные окружности в треугольнике

Использован материал статьи А. Блинков, Ю. Блинков. Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике ... , «Квант», №2/2012.

В большинстве задач этого занятия будут рассматриваться одна и та же конструкция: отрезок *CD* разбивает треугольник *ABC* на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Точки I_1 и I_2 – центры этих окружностей (см. рис. 1).

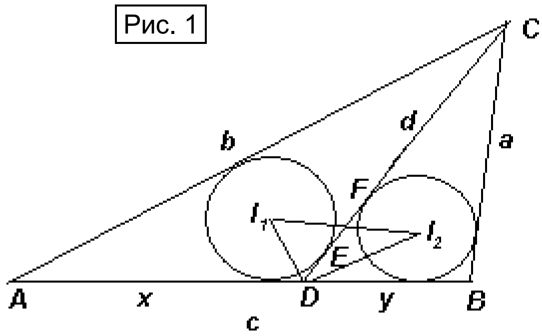
Два свойства этой конструкции – очевидны:

1) Треугольник I_1DI_2 – прямоугольный. Действительно, DI_1 и DI_2 – биссектрисы смежных углов, поэтому $\angle I_1DI_2 = 90°$.

2) $\angle I_1CI_2 = \frac{1}{2}\angle ACB$. Действительно, CI_1 и CI_2 – биссектрисы углов *ACD* и *BCD* соответственно (*провести*).

Другие свойства этой конструкции, а также свойства родственных конструкций вы получите по ходу решения задач.

Рис. 1



Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

1. На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечена точка *D*. В каждый из треугольников *ADC* и *BDC* вписана окружность. Эти окружности касаются отрезка *CD* в точках *E* и *F*.
1) Найдите *EF*, если *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AD* = *x*, *BD* = *y*;
2) Упростите полученный ответ, если: а) треугольник *AB*C – равнобедренный с основанием *AB*; б) *CD* – медиана; в) *CD* – биссектриса и *AB* = *c*; г) *D* – точка касания со стороной *AB* окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

2. На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечена точка *D*. Для треугольников *ADC* и *BDC* рассматриваются вневписанные окружности, касающиеся *AC* и *BC* соответственно. Пусть *P* и *Q* – точки касания этих окружностей с прямой *DC*.
1) Найдите *PQ*, если *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AD* = *x*, *BD* = *y*.
2) Рассмотрите такие же частные случаи, как и в задаче $1_{2)}$.

3. *CD* – медиана треугольника *ABC.* В треугольники *ACD* и *BCD* вписаны окружности радиусов *r* и *R* (*r* < *R*). Докажите, что *R* < 2*r*..

4. Постройте две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон данного треугольника и другой окружности.

5. Точки *O* и *I* – центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника *ABC*. Две равные окружности касаются сторон *AB*, *BC* и *AC*, *BC* соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке *K*. Оказалось, что *K* лежит на прямой *OI*. Найдите угол *BAC*.

6. На стороне *BC* треугольника *ABC* выбрана точка *D* так, что равны радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ABD* и *ACD*. Докажите, что равны радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон *BD* и *CD* соответственно.

7. Дан произвольный треугольник *ABC*. Постройте прямую, проходящую через точку *C* и разбивающую его на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей.

8. Точка *D* выбрана на гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* так, что окружности, вписанные в треугольники *ACD* и *BCD*, имеют равные радиусы. Докажите, что $S_{ABC} = CD^2$.

9. В треугольнике *ABC* проведена медиана *CD*. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники *ACD* и *BCD*, а точки J_1 и J_2 – центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон *AC* и *BC* соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

10. В треугольнике *ABC* проведена медиана *AM*. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники *ABM* и *ACM*, *N* – середина дуги *BC* (содержащей вершину *A*). Докажите, что точки *A*, *N*, I_1 и I_2 лежат на одной окружности.