

### Автомедианные треугольники

Вспомним определение среднего квадратичного двух чисел: **число  $z$  называется**

**средним квадратичным положительных чисел  $x$  и  $y$ , если  $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$ .**

**Определение.** Треугольник, одна из сторон которого является **средним квадратичным** двух других, называется **автомедианным**.

Очевидно, что автомедианным является, например равносторонний треугольник.

Прежде, чем станет понятен смысл такого названия треугольника, условимся для всех задач этого занятия: стандартно обозначать длины сторон треугольника  $ABC$  ( $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ );  $m_a$ ,  $m_b$  и  $m_c$  – медианы треугольника, проведенные к соответствующим сторонам;  $M$  – точка пересечения медиан,  $O$  – центр описанной окружности. Если  $ABC$  –

**автомедианный** треугольник, то  $b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$  ( $a \leq b \leq c$ ).

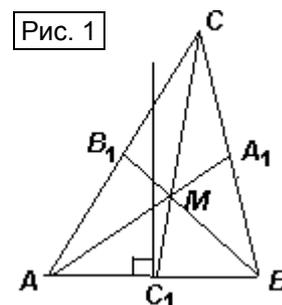
1) Вспомните формулу для вычисления медианы треугольника по его сторонам.

$$[m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}].$$

2) Докажите, что **большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана, и наоборот, большей медиане соответствует меньшая сторона.**

Первый способ. Рассмотрим разность квадратов двух медиан:  $m_a^2 - m_b^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} = \frac{3(b^2 - a^2)}{4}$ . Следовательно,  $b > a \Leftrightarrow m_b < m_a$ .

Второй способ. Пусть  $M$  – точка пересечения медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  (см. рис. 1). Проведем серединный перпендикуляр к стороне  $AB$ , который разобьет плоскость на две полуплоскости. Так как, по условию,  $BC = a < BA = c$ , то медиана  $CC_1$  лежит в одной полуплоскости со стороной  $BC$ , значит, точка  $M$  лежит в той же полуплоскости. Следовательно,  $BM < AM$ , поэтому  $AA_1 > BB_1$ , то есть  $m_a > m_b$ . В обратную сторону – аналогично.



3) Теперь рассмотрим задачу, решив которую, мы сможем сформулировать основной признак автомедианного треугольника.

**Задача.** Найдите зависимость между сторонами треугольника, если треугольник, составленный из его медиан, ему подобен.

**Решение.** Условие задачи равносильно выполнению равенства  $\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a}$ . Его

следствием является равенство  $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{m_c^2}{a^2}$ , подставив в которое выражения для медиан и

избавившись от знаменателя, получим:  $a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) = c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) \Leftrightarrow$

$2b^2(a^2 - c^2) = a^4 - c^4 \Leftrightarrow a = c$  или  $b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$ . В обоих случаях должно еще выполняться

равенство  $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{m_b^2}{b^2}$ .

В первом случае получим, что  $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \frac{a^2 + 2b^2}{4a^2}$ , а

$\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4b^2} = \frac{4a^2 - b^2}{4b^2}$ . Приравняв и упрощая, получим:  $4a^4 - a^2b^2 = a^2b^2 + 2b^4 \Leftrightarrow$

$(a^4 - b^4) + (a^4 - a^2b^2) = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(2a^2 + b^2) = 0$ , значит  $a = b$ , то есть искомым треугольником – равносторонним.

Во втором случае:  $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \frac{a^2 + c^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$  и

$\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4b^2} = \frac{4b^2 - b^2}{4b^2} = \frac{3}{4}$ , то есть требуемое равенство выполняется без дополнительных условий.

Таким образом, сформулированное в задаче условие является **основным признаком автомедианного треугольника**. Проведя аналогичные выкладки, несложно проверить, что если  $b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$ , то треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$  – автомедианный, то есть сформулированное условие можно считать и **основным свойством автомедианного треугольника**.

В заключение отметим важное следствие полученных утверждений, возникшее по ходу выкладок: **в автомедианном треугольнике коэффициент подобия «медианного» треугольника и самого треугольника равен  $\frac{\sqrt{3}}{2}$** .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что средний по величине угол автомедианного треугольника не превосходит  $60^\circ$ .
2. Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда:
  - а) медианы треугольника обратно пропорциональны его высотам;
  - б) одна из его медиан является средним квадратичным двух других;
  - в) вершина, середины двух сторон, сходящихся в этой вершине, и точка пересечения медиан лежат на одной окружности.
3. Пусть медиана  $BB'$  треугольника  $ABC$  пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке  $T$ . Докажите, что  $ABC$  – автомедианный тогда и только тогда, когда:
  - а)  $M$  – середина  $BT$ ; б) точки  $M$  и  $T$  симметричны относительно точки  $B'$ .
4. Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда середина отрезка  $BM$  лежит на окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .
5. а) Докажите, что для любого треугольника выполняется равенство:  $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ , где  $O$  и  $H$  – центр его описанной окружности и ортоцентр соответственно. б) Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда его прямая Эйлера перпендикулярна одной из медиан.
6. Длина медианы, проведенной из вершины  $B$  треугольника  $ABC$  равна  $m$ . Оказалось, что основание этой медианы, середины двух других медиан и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Найдите  $AC$ .
7. В треугольнике  $ABC$  точки  $A'$  и  $C'$  – середины сторон  $BC$  и  $AB$  соответственно. Точки  $K$  и  $L$  – основания перпендикуляров, опущенных из  $A'$  на  $AB$  и  $AC$ , а точки  $M$  и  $N$  – основания перпендикуляров, опущенных из  $C'$  на  $BC$  и  $AC$ . Докажите, что  $KL = MN$  тогда и только тогда, когда треугольник  $ABC$  равнобедренный (с основанием  $AC$ ) или автомедианный (со средней по длине стороной  $AC$ ).
8. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ ,  $AB$  – их общая касательная ( $A$  и  $B$  – точки касания). Оказалось, что  $Q$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABP$ . Докажите, что отрезок  $AB$  является средним квадратичным отрезков  $AP$  и  $BP$ .