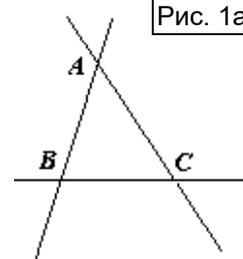


Вневписанная окружность_1

Использован материал из статьи А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков. Вневписанная окружность. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №2/2009.

Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках A , B и C (см. рис. 1а).

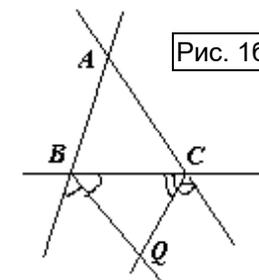
Рис. 1а



Сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?

Рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC (см. рис. 1б). Так как сумма углов, образованных ими со стороной BC , меньше, чем 180° , то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке Q . Тогда точка Q равноудалена от прямых AB , AC и BC . Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника ABC , получим еще две точки, обладающие требуемым свойством.

Рис. 1б



Таким образом, помимо центра окружности, вписанной в треугольник ABC , существуют, по крайней мере, **еще три точки**, равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром **окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон**. Такие **окружности называют вневписанными** для данного треугольника ABC .

Упражнения. 1) Докажите, что других точек, равноудаленных от прямых AB , AC и BC , не существует (то есть их ровно четыре).

[Достаточно рассмотреть часть плоскости, ограниченные углами, вертикальными углами треугольника. В них не может быть точек, равноудаленных от трех прямых]

2) Докажите, что точка Q лежит на биссектрисе угла BAC (см. рис. 1б).

[Точка Q равноудалена от прямых AB и AC]

3) Пусть I – центр вписанной окружности. Вычислите углы BIC и BQC , если $\angle BAC = \alpha$.
 $[\angle BIC = 90^\circ + 0,5\alpha; \angle BQC = 90^\circ - 0,5\alpha]$

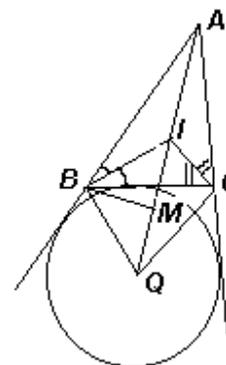
Обратите внимание, что угол между биссектрисами внутренних углов – острый, а между биссектрисами внешних углов – тупой.

Рис. 1в

Почему сумма этих углов равна 180° ?

[Углы IBQ и ICQ – прямые]

Отсюда следует, что точки B и C лежат на окружности с диаметром IQ . Где лежит центр этой окружности? Оказывается, он лежит на окружности, описанной около треугольника ABC . Этот факт называется **теоремой Мансиона** и является прямым следствием **теоремы о «трезубце»** или **«трилистнике»**.



Действительно, пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$ (см. рис. 1в). Угол BIM – внешний для треугольника AIB , значит, $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = 0,5(\alpha + \beta)$. Кроме того, $\angle IBM = \angle IBC + \angle MBC = 0,5\alpha + 0,5\beta$, так как $\angle MBC = \angle MAC = 0,5\beta$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC). Следовательно, $\angle BIM = \angle IBM$, то есть, $MI = MB$.

Аналогично получим, что $MI = MC$, значит, M – центр окружности, описанной около треугольника BIC , а точка Q лежит на этой окружности, то есть, точки B , C , I и Q лежат на окружности с центром M .

4) Пусть окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , а продолжений сторон AB и AC – в точках N и P соответственно (см. рис.2). Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны BC в точке K , а стороны AB – в точке L . Докажите, что:

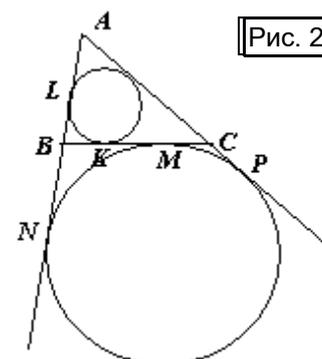


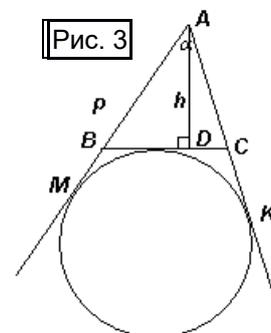
Рис. 2

а) $BK = p - b$, где p – полупериметр треугольника ABC , b – длина стороны AC ; б) $AN = p$.

[Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим: $AN = AL$, $BK = BL$ и $CN = CK$. Сумма этих шести отрезков составляет периметр треугольника ABC , поэтому, $AN + BK + CN = p$. Учитывая, что $AN + CN = b$, получаем равенство а). Применяя эту же теорему об отрезках касательных к другой окружности, получим: $AP = AT$, $BM = BP$ и $CM = CT$. Тогда $P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BM + CM = AB + AC + BP + CT = AP + AT = 2AP$, откуда и следует утверждение б)]

Пример. Объясните, как построить треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.

Решение. Пусть искомым треугольником ABC , в котором заданы $\angle A = \alpha$, высота $AD = h$ и $P_{\triangle ABC} = 2p$, построен. Проведем его невписанную окружность, касающуюся продолжений сторон AC и AB в точках K и M соответственно, тогда $AK = AM = p$ (см. рис. 3). Кроме того, касательная BC к этой окружности находится на расстоянии h от точки A .



Отсюда вытекает следующее построение: 1) строим угол A величины α , на его сторонах откладываем отрезки $AK = AM = p$, после чего строим окружность, касающуюся сторон угла в этих точках; 2) строим окружность с центром A и радиусом h ; 3) строим общую внутреннюю касательную к двум окружностям, которая пересечет стороны угла в искомым точках B и C .

Отметим, что, в зависимости от соотношения между заданными параметрами, задача либо имеет единственное решение (так как общие внутренние касательные к двум окружностям симметричны относительно биссектрисы угла BAC), либо не имеет решений.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

- Докажите, что:
 - отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой касания невписанной окружности и противоположной стороны, делит треугольник на два треугольника равного периметра;
 - точки касания вписанной и невписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.
- Объясните, как построить треугольник ABC , зная положение трех точек A_1 , B_1 и C_1 , являющихся центрами невписанных окружностей треугольника ABC .
- Докажите, что радиус одной из невписанных окружностей равен полупериметру треугольника тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.
- $ABCD$ – параллелограмм. Невписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.
- а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.
 б) Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину отрезка, если радиусы окружностей равны R и r ($R > r$).
- Даны угол и точка, лежащая между его сторонами. Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с заданным периметром.
- Дан треугольник ABC . На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1 . Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC , содержит центр невписанной окружности треугольника ABC .
- Существует ли треугольник, у которого радиус одной из невписанных окружностей равен радиусу описанной окружности?

- 9.** Дан параллелограмм $ABCD$. Внеписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N . Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD .
- 10.** Объясните, как построить четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D , если известно, что в него можно вписать окружность.