

Угол между радиусом описанной окружности и стороной треугольника

Сформулируем и докажем **основной факт**, выражающий связь между двумя углами: углом между радиусом описанной окружности и стороной треугольника и углом треугольника. Знание этого факта помогает решить много геометрических задач.

Пусть O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC . Тогда $\angle OCA = 90^\circ - \angle ABC$.

Доказательство. Пусть K – середина стороны AC (см. рис.), тогда треугольник AOC – равнобедренный, поэтому $OK \perp AC$.

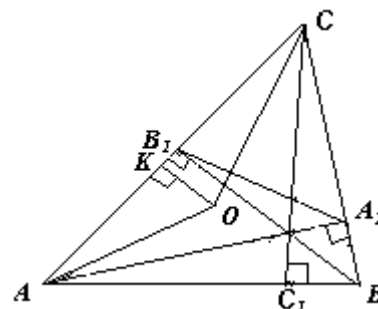
Значит, $\angle KOC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle ABC$. Следовательно, $\angle OCA = 90^\circ - \angle KOC = 90^\circ - \angle ABC$.

Понятно, что для других радиусов все аналогично.

Следствия. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты треугольника (дополнить рис.). Тогда:

1) $\angle OCA = \angle C_1CB$; 2) прямые CO и CC_1 симметричны относительно биссектрисы угла ACB ; 3) $OC \perp A_1B_1$, то есть, радиусы описанной окружности перпендикулярны сторонам ортотреугольника; 4) касательные к описанной окружности треугольника параллельны сторонам его ортотреугольника.

Доказательство. 1) $\angle C_1CB = 90^\circ - \angle ABC$; 2) разность равных углов; 3) $\angle A_1B_1C + \angle KCO = \angle ABC + 90^\circ - \angle KOC = 90^\circ$, значит, $OC \perp A_1B_1$; 4) касательная, проведенная к описанной окружности в точке C , перпендикулярна радиусу OC , а $OC \perp A_1B_1$, значит, она параллельна A_1B_1 .



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Выведите аналогичный основной факт для случаев, когда угол B треугольника ABC – прямой или тупой. Верны ли следствия для этих случаев?
2. В треугольнике ABC проведена биссектриса CL , O – центр окружности, описанной около ABC . На стороне AC отмечена точка D так, что $DC = BC$. Докажите, что $CO \perp DL$.
3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Докажите, что если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.
4. Биссектриса угла A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекает описанную окружность в точке W , I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника IBW лежит на стороне BC .
5. H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC , O_A и $O_{\tilde{N}}$ – центры окружностей, описанных около треугольников AHB и CHB соответственно. Докажите, что $O_A O_{\tilde{N}} = AC$.
6. Дан треугольник ABC . Рассматриваются все такие пары точек K и L на стороне AC , что $\angle ABK = \angle CBL$. Докажите, что центры описанных окружностей всех треугольников KBL лежат на одной прямой.
7. Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC , пересекает сторону AC в точке K , а описанную около ABC окружность – в точке M . Докажите, что:
 - а) центры O_A описанных окружностей всех таких треугольников AMK лежат на одной прямой; б) $O_A K \perp BC$. в) Пусть $O_{\tilde{N}}$ – центр окружности, описанной около треугольника CMK . Докажите, что прямые AO_A и $\tilde{N}O_{\tilde{N}}$ пересекаются на высоте треугольника ABC .
8. Из середины D стороны BC треугольника ABC опущены перпендикуляры DE и DF на стороны AB и AC соответственно. M – середина отрезка EF . Докажите, что $DM \parallel AO$, где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .
9. Пусть I , I_a и I_c – центры вписанной и двух внеписанных окружностей треугольника ABC , O – центр описанной окружности треугольника $II_a I_c$. Докажите, что $OI \perp AC$.
10. Точка D вне остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке AD .