18.02.20

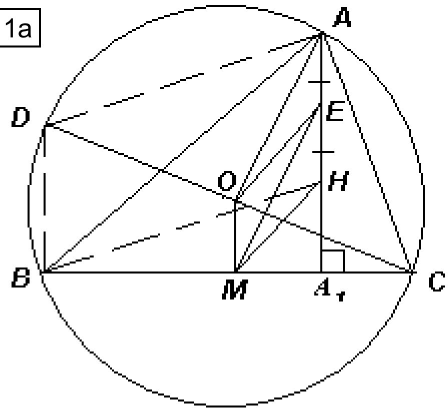
Параллелограммы в треугольнике

В течение двух занятий мы рассмотрим геометрическую конструкцию, которая некоторым из вас знакома. В процессе решения задач вы получите ряд важных фактов геометрии треугольника.

Рассмотрим остроугольный треугольник *ABC*, *O* – центр описанной около него окружности, AA_1 – высота, *H* – ортоцентр, *M* – середина *BC* (см. рис. 1а).

1) Докажем, что $OM = \frac{1}{2}AH$.

Рис. 1а



Решение. Проведем описанную и окружность и ее диаметр *CD*. Тогда $\angle DBC = 90°$, значит, $BD \parallel AH$. Кроме того, $DA \perp AC$ и $BH \perp AC$, поэтому, $DA \parallel BH$. Таким образом, *BDAH* – параллелограмм. Так как *O* – середина *DC*, *M* – середина *BC*, то *OM* – средняя линия треугольника *BCD*, следовательно, $OM \parallel BD \parallel AH$ и $OM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AH$.

Таким образом, ***расстояние от центра описанной окружности до стороны треугольника в два раза меньше расстояния от противолежащей вершины до ортоцентра***.

2) Пусть *E* – середина отрезка *AH*. Докажите, что ***четырехугольники OMHE и OMEA – параллелограммы***.

Решение. $OM \parallel AH$ и $OM = AE = EH$.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что полученные утверждения справедливы и для случая, когда высота лежит вне треугольника.

2. В треугольнике *ABC*: *M* – середина *BC*, *O* – центр описанной окружности, *R* – ее радиус, *H* – ортоцентр, *E* – середина *AH*. Докажите, что: а) $ME = R$; б) медиана *AM* делит отрезок *OE* пополам.

3. Треугольники *ABC* и A_1BC вписаны в одну и ту же окружность, *H* и H_1 – их ортоцентры. Докажите, что $AH = A_1H_1$.

4. В треугольнике *ABC*: $BC = a$; $\angle BAC = \alpha$, *H* – ортоцентр, *R* – ее радиус описанной окружности. Докажите, что: а) $AH = 2R|\cos\alpha|$; б) $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

5. В остроугольном треугольнике *ABC*: AA_1 – высота, *M* – середина *BC*, *O* – центр описанной окружности, *H* – ортоцентр, *F* – середина *OH*. Найдите угол A_1FM, если $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.

6. В остроугольном треугольнике *ABC* биссектриса *AL* пересекает отрезок *ME* в точке *N* (*M* – середина *BC*, *E* – середина *AH*, где *H* – ортоцентр). Докажите, что: а) $NE = AE$; б) $\angle ANH = 90°$.

7. Через ортоцентр *H* треугольника *ABC* провели прямые, параллельные сторонам *AB* и *AC* и пересекающие прямую *BC* в точках *D* и *F* соответственно. Через точки *D* и *F* проведены перпендикуляры к *BC*, пересекающие стороны *AB* и *AC* в точках *D*' и *F*'. Докажите, что прямая *D*'*F*' пересекает окружность, описанную около *ABC*, в точках, диаметрально противоположных вершинам *B* и *C*.

8. В треугольнике *ABC* *O* – центр описанной окружности, *H* – ортоцентр. Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ (***формула Гамильтона***).

9. а) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, где *O* – центр описанной окружности треугольника со сторонами *a*, *b* и *c*, *R* – ее радиус, *H* – ортоцентр треугольника. б) Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите треугольник с наибольшей суммой квадратов сторон.

10. В треугольник *ABC* вписана окружность. Из середины каждого отрезка, соединяющего две точки касания, проводится перпендикуляр к противолежащей стороне. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.