

Окружность девяти точек и прямая Эйлера

Напомним, что на прошлом занятии была получена формула $OM = \frac{1}{2}AH$ и следствие из нее: четырехугольники

$OMHE$ и $OMEA$ – параллелограммы (см. рис. 1 а, б).

Используя эти параллелограммы, в ходе решения задач вы получили еще несколько интересных фактов. Но самые интересные факты геометрии треугольника мы оставили на сегодня.

1) Пусть F – середина OH (см. рис. 1а). Докажем, что точки E , M и A_1 лежат на окружности с центром F и найдем радиус этой окружности.

Решение. Так как F – точка пересечения диагоналей параллелограмма $OMHE$ и $\angle MA_1E = 90^\circ$; то $FE = FM = FA_1 = \frac{1}{2}ME = \frac{1}{2}R$.

Проведя аналогичные рассуждения для отрезков BH и CH , получим другие точки, лежащие на этой же окружности: середины сторон AB и AC , основания высот BB_1 и CC_1 , середины отрезков BH и CH .

Такая окружность называется **окружностью девяти точек данного треугольника** или **окружностью Эйлера**. Она проходит **через середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника** (изобразить).

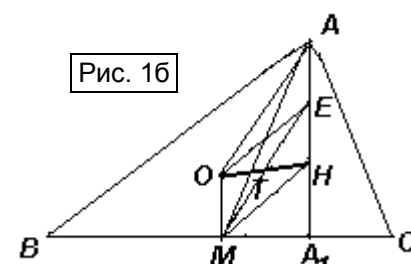
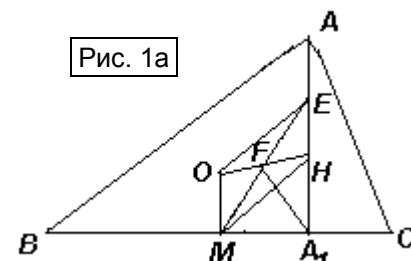
2) Проведем медиану AM , которая пересечет OH в точке T (см. рис. 1б). Так как треугольники OTM и HTA подобны (по двум углам), то $\frac{OT}{TH} = \frac{MT}{AT} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, T – точка пересечения медиан треугольника ABC . Таким образом, **в любом треугольнике центр O описанной окружности, точка T пересечения медиан и ортоцентр H лежат на одной прямой, которая называется прямой Эйлера**. При этом, **точка T делит отрезок OH в отношении $1 : 2$, считая от точки O** .

Отношение $OT : TH$ можно было найти из других соображений: прямая AM пересекает сторону OE параллелограмма $OENM$ в ее середине, поэтому ее точка T пересечения с диагональю OH делит эту диагональ в отношении $1 : 2$ (см. пример 1 занятия «Дополнительные построения_2»).

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- Докажите, что: а) точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон; лежат на описанной окружности; б) окружности, описанные около треугольников ABC и BCH , где H – ортоцентр треугольника ABC , симметричны относительно BC .
- Точка G такова, что точки, симметричные ей относительно сторон треугольника, лежат на его описанной окружности. Верно ли, что G – ортоцентр треугольника ABC ?
- Докажите, что: а) прямая проходящая через точку пересечения медиан треугольника и середину отрезка, соединяющего вершину с ортоцентром, пересекает описанную окружность в точке, диаметрально противоположной этой вершине; б) точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон; лежат на описанной окружности.
- Найдите угол A треугольника ABC , если на его окружности девяти точек лежит середина отрезка: а) AO , где O – центр описанной окружности; б) AI , где I – центр вписанной окружности.



5. H – ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что: а) окружности девяти точек треугольников ABC , HAB , HBC и HCA совпадают; б) прямые Эйлера этих треугольников пересекаются в одной точке.
6. Докажите, что описанная окружность треугольника делит пополам отрезки, соединяющие центр ее вписанной окружности с центрами невписанных окружностей.
7. В треугольнике ABC точка H_1 , симметрична ортоцентру H относительно вершины C , а точка C_1 симметрична точке C относительно середины стороны AB . Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC , является серединой отрезка H_1C_1 .
8. Из вершины A остроугольного треугольника ABC провели высоту AE и диаметр описанной около треугольника окружности, который пересек сторону BC в точке D . Докажите, что описанная окружность треугольника ADE касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC .
9. Прямая Эйлера треугольника ABC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q так, что $AP = AQ$. Найдите угол A .
10. Центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой Эйлера. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.