**17.12.19**

## Простейшие геометрические неравенства

На этом занятии мы займемся простейшими геометрическими неравенствами.

Решение большинства задач опирается на неравенство треугольника, причем не стоит забывать, что оно двойное: $|a-b| < c < a+b$.

Также часто используется: 1) его следствие для медианы треугольника: $\frac{|a-b|}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$. Вспомните, как его получить? [*Удвоение медианы*]

И вообще, не забывайте о типовых дополнительных построениях!

2) Обобщение неравенства треугольника: теорема о длине ломаной.

## Упражнения и задачи для самостоятельного решения

**1.** Докажите, что: а) в любом четырехугольнике сумма длин диагоналей меньше, чем сумма длин всех сторон; б) в любой трапеции разность длин боковых сторон меньше разности длин оснований.

**2.** Докажите, что в выпуклом четырехугольнике найдется вершина, расстояние от которой до противолежащей диагонали не превосходит половины этой диагонали.

**3.** Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра, но больше, чем три четверти периметра.

**4.** Известно, что для сторон треугольника выполняется неравенство $a > b > c$. Докажите, что для медиан, проведенных к этим сторонам, выполняется неравенство $m_a < m_b < m_c$.

**5.** Даны треугольник $ABC$ и точки $D$ и $E$ такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90°$. Докажите, что длина отрезка $DE$ не превосходит половины периметра треугольника $ABC$.

**6.** Докажите, что для любой точки $K$, лежащей внутри треугольника $ABC$, выполняется неравенства: а) $AB + AC > KB + KC$; б) $p < AK + BK + CK < 2p$, где $p$ – полупериметр $ABC$.

**7.** Внутри отрезка $AB$ взяты точки $C$ и $D$ так, что $AC = BD$. Докажите, что для любой точки $O$, не лежащей на прямой $AB$, выполняется неравенство $OA + OB > OC + OD$.

**8.** а) На биссектрисе внешнего угла C треугольника $ABC$ выбрана произвольная точка $N$. Докажите, что $AN + BN > AC + BC$.

б) Точка $M$ – середина стороны $BC$ выпуклого четырехугольника $ABCD$, $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + \frac{1}{2}BC + CD \geq AD$.

**9.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ на боковых сторонах $AB$ и $BC$ выбраны точки $K$ и $L$ так, что $AK = BL$. Докажите, что $KL \geq \frac{1}{2}AC$. Когда достигается равенство?

**10.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ отмечены точки $K$ и $L$ так, что $AK = BL$, а на стороне $BC$ – точки $M$ и $N$ так, что $BM = CN$. Докажите, что $KN + LM \geq AC$. Когда достигается равенство?