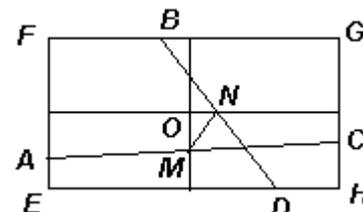


Геометрическое место точек_2

На этом занятии будет активно задействовано ГМТ, которое на предыдущем занятии мы вспомнили, но не использовали при решении задач: ГМТ, из которых данный отрезок виден под заданным углом. Чаще всего встречается его частный случай, когда заданный угол – прямой.

Пример. На плоскости даны точки A , B , C и D . Рассматриваются все прямоугольники, для которых эти точки лежат на сторонах (по одной точке на каждой стороне). Найдите геометрическое место центров таких прямоугольников.



Решение. Пусть $EFGH$ – один из прямоугольников с центром O , а точки A и C лежат на его противоположных сторонах EF и GH . Рис. 1 Проведем через точку O оси симметрии прямоугольника. По теореме Фалеса они пройдут через середины M и N отрезков AC и BD (см. рис. 1). Так как $\angle MON = 90^\circ$, то точка O лежит на окружности с диаметром MN .

Обратно, для любой точки этой окружности, отличной от M и N , проведем прямые OM и ON , тогда $\angle MON = 90^\circ$. Далее, проведя прямые из точек A и C перпендикулярно ON , а из точек B и D – перпендикулярно OM , получим прямоугольник с центром O . При этом, точки M и N также являются центрами прямоугольников.

Учитывая, что на противоположных сторонах прямоугольника могут лежать также точки A и B или A и D , получим, что **искомое ГМТ – объединение трех окружностей, диаметрами которых являются отрезки, соединяющие середины AC и BD , AB и CD , AD и BC .**

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Даны окружность с центром O и точка A , ей принадлежащая. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в точке A .
2. Дана окружность. Найдите ГМТ M таких, что касательные проведенные из M к окружности имеют заданную длину.
3. На прямой отмечены точки A и B . Рассматриваются все пары касающихся между собой окружностей, одна из которых касается прямой в точке A , а другая – в точке B . Найдите ГМТ касания окружностей.
4. Даны окружность и точка A . Найдите геометрическое место середин хорд, проходящих через точку A , если эта точка лежит: а) на окружности; б) внутри окружности; в) вне окружности.
5. Рассматриваются все треугольники ABC , у которых положение вершин B и C зафиксировано, а вершина A перемещается в плоскости треугольника так, что медиана CM имеет одну и ту же длину. По какой траектории движется точка A ?
6. Дана хорда AB окружности. Рассматриваются всевозможные треугольники ABC , вписанные в эту окружность. Найдите ГМТ пересечения: а) высот; б) биссектрис треугольника ABC .
7. Точка P перемещается по описанной окружности квадрата $ABCD$. Прямые AP и BD пересекаются в точке Q , а прямая, проходящая через точку Q параллельно AC , пересекает прямую BP в точке M . Найдите ГМТ M .
8. Найдите ГМТ X , лежащих внутри равностороннего треугольника ABC и для которых выполняется равенство $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ$.
9. Дан равносторонний треугольник ABC . а) Найдите ГМТ X таких, что $AX^2 = BX^2 + CX^2$. б) Докажите, что проекции любой из точек найденного ГМТ на прямые, содержащие стороны треугольника, являются вершинами прямоугольного треугольника.