3.03.20

Кратчайшие маршруты

Использованы материалы из книжки М.А. Волчкевича «Уроки геометрии в задачах. 7 – 8 классы», – М.: МЦНМО, 2016.

В течение двух занятий мы займемся геометрическими задачами, связанными с наибольшими и наименьшими значениями каких-либо величин. Такие задачи называются ***экстремальными*** (*от слова extremum – крайний*). Задачи сегодняшнего занятия будут связаны с поиском кратчайших маршрутов или наименьших сумм расстояний.

В качестве примера рассмотрим знаменитую задачу Герона Александрийского.

Пример. Дана прямая m и точки A и B, лежащие в одной полуплоскости относительно m.
а) Постройте на прямой m такую точку M, чтобы ломаная AMB имела наименьшую длину.
б) Постройте на прямой m отрезок CD заданной длины (*много меньшей, чем расстояние от A до B*) так, чтобы длина ломаной $ACDB$ была наименьшей.

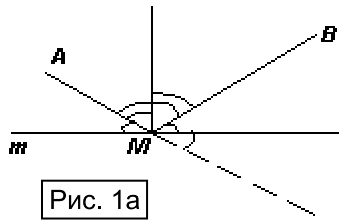

Рис. 1а

Идея решение может возникнуть из физических соображений. Из курса физики известно, что свет распространяется прямолинейно с одной и той же скоростью по кратчайшему пути. Представим себе, что прямая m – это зеркало. Тогда луч, выпущенный из точки A и попавший в точку B, отразившись от зеркала в точке M, пройдет так, что угол его падения будет равен углу отражения, то есть равны углы, которые образуют эти лучи с перпендикуляром к прямой m (см. рис. 1а). Следовательно, должны быть равны и углы, которые эти лучи образуют с прямой m, то есть, продлив AM за точку M, мы получим равные углы. Теперь эту идею можно оформить геометрически.

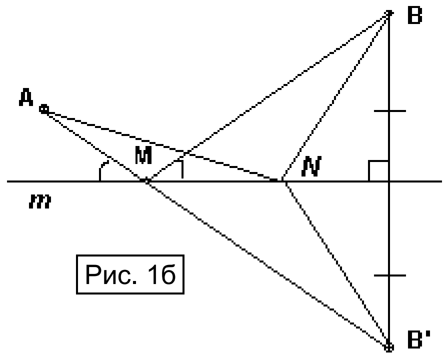

Рис. 1б

Решение. а) Пусть искомая точка M построена. Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно прямой m (см. рис. 1б). Длина ломаной AMB равна: $AM + MB = AM + MB'$. Эта длина будет наименьшей из возможных, если точка M лежит на отрезке AB'. Действительно, для любой другой точки N, лежащей на прямой CD, $AN + NB = AN + NB' > AB' = AM + MB'$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки B', симметричной точке B относительно прямой m. Искомая точка M является пересечением прямых AB' и m.

Понятно, что точки A и B равноправны, поэтому можно было строить точку, симметричную точке A. Отметим также, что эту задачу можно формулировать различным образом, моделируя различные жизненные ситуации.

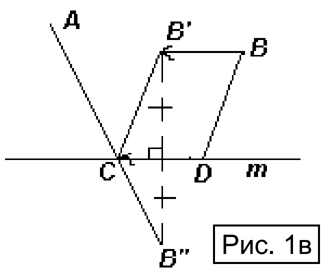

Рис. 1в

б) Пусть искомые точки C и D построены и отрезок CD имеет заданную длину (см. рис. 1в). Длина ломаной $ACDB$ зависит только от суммы длин AC и BD, поэтому «передвинем» отрезок BD параллельно самому себе так, чтобы он занял положение $B'C$ (*то есть рассмотрим* ***параллельный перенос*** *на вектор* $\overline{DC}$), тогда отрезки AC и $B'C$ образуют равные углы с прямой m, что дает наименьшее значение суммы длин AC и BD.

Таким образом, после выполнения параллельного переноса вдоль прямой m на отрезок заданной длины (например, в направлении от B к A), решение задачи сведется к построению точки C, описанному в пункте а). Затем «передвинем» все обратно (*выполним* ***параллельный перенос*** *на вектор* $\overline{CD}$, *обратный к рассмотренному*), и получим требуемую ломаную.

Отметим, что точка B'', использованная при описанном построении является образом точки B при ***скользящей симметрии*** *(композиции осевой симметрии и параллельного переноса вдоль этой оси).*

Таким образом, многие задачи, связанные с наименьшей длиной пути, решаются с использованием осевой симметрии и параллельного переноса. Но, наряду с ними, могут использоваться и другие приемы, которые вам придется придумать.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

2. а) Дан острый угол AOB и точка M внутри него. На сторонах угла постройте точки X и Y так, чтобы периметр треугольника MXY был наименьшим.

б) Найдите этот периметр, если $\angle AOB = 30^\circ$, $OM = 1$.

3. Внутри острого угла AOB даны точки M и N. Постройте на сторонах угла точки X и Y так, чтобы периметр четырехугольника $XMNY$ был наименьшим.

4. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника – наименьшая.

5. а) Населенные пункты A и B разделены каналом с параллельными берегами. В каком месте необходимо построить мост (перпендикулярно берегам), чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?

б) Населенные пункты A и B разделены двумя непараллельными друг другу каналами (у каждого канала два берега параллельны). Где нужно построить мосты, чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?

6. Дан равносторонний треугольник ABC. Постройте прямую m так, чтобы сумма расстояний от вершин треугольника до m была наименьшей.

7. Один из углов остроугольного треугольника равен 30°. На сторонах треугольника отмечено по одной точке. Докажите, что наименьший периметр треугольника с вершинами в этих точках равен одной из высот данного треугольника.

8. Дан остроугольный треугольник ABC. На его сторонам отмечены точки K, L и M (по одной на каждой стороне). Укажите положение этих точек, для которого периметр треугольника будет наименьшим. (***Задача Фаньяно***)

9. На каждой стороне прямоугольника отмечено по точке. Докажите, что наименьший периметр четырехугольника с вершинами в этих точках равен сумме диагоналей прямоугольника.

10. Дан угол и точка внутри него. Постройте прямую, проходящую через эту точку, которая отсекает от угла треугольник наименьшего периметра.