11.02.20

Две пересекающиеся окружности

На этом занятии нам опять потребуются все основные теоремы, связанные с углами в окружности: 1) теорема о вписанном угле и ее следствие; 2) теорема об угле между касательной и хордой; 3) необходимые и достаточные условия того, чтобы четырехугольник был вписанным в окружность (*три варианта*); 4) ГМТ, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

Во всех задачах этого занятия будет в том или ином виде присутствовать конструкция из двух пересекающихся окружностей.

Пример. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что: а) длина отрезка BC не зависит от выбора точки A; б) касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

Решение. Возможны два случая расположения точки A (см. рис. 1 а, б).

Рис. 1а

а) Достаточно доказать, что все такие отрезки BC стягивают равные дуги. Рассмотрим угол BPC, опирающийся на дугу BC. Он является внешним для треугольника APC, значит, $\angle BPC = \angle PAC + \angle PCA$, а оба этих угла постоянны, так как опираются на фиксированные дуги данных окружностей (на рис. 1б $\angle PCA = 180° - \angle PCQ$, который фиксирован).

б) Пусть AX – касательная к окружности. Используя теорему об угле между касательной и хордой и тот факт, что точки B, C, P и Q лежат на одной окружности, получим: $\angle PBC = \angle PQA = \angle PAX$. Следовательно, $AX \parallel BC$.

Можно также использовать антипараллельность отрезков BC и PQ по отношению к данным секущим.

Рис. 1б

Почти во всех задачах этой конструкции будут возможны два случая расположения. Если они аналогичны, то для экономии времени вы можете рассматривать только один из них.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Докажите, что величина угла AQB не зависит от выбора секущей.

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B, а через точку Q – секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что:
а) $\angle AQB = \angle CPD$; б) $AC \parallel BD$; в) $AC = BD$ тогда и только тогда, когда $AB \parallel CD$.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, которые пересекаются в точке E. Докажите, что:
а) четырехугольник $BCED$ – вписанный;
б) величина угла CED не зависит от выбора секущей.

4. На хорде AB окружности с центром O выбрана произвольная точка C. Через точки A, O и C проведена окружность, которая пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что треугольник BCD – равнобедренный.

5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, пересекающая отрезок PQ, последовательно пересекает эти окружности в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

6. Две окружности одинакового радиуса пересекаются в точках A и B. Произвольная прямая, проходящая через точку B, пересекает еще раз эти окружности в точках X и Y. Найдите геометрическое место середин отрезков XY.

7. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника AQB.

8. Две окружности с центрами O и O' пересекаются в точках P и Q. Через произвольную точку X окружности с центром O проведены прямые XP и XQ, которые пересекают окружность с центром O' в точках Y и Z соответственно. Рассматриваются все треугольники XYZ.

1) Докажите, что: а) высоты; б) биссектрисы; в)* медианы всех таких треугольников, проведенные из точки X, проходят через одну и ту же точку.

2) Найдите положение точки X, для которого треугольник XYZ имеет наибольшую площадь.

3)* Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников XYZ.

4)* Пусть окружность, описанная около треугольника XYZ, вторично пересекает окружность с центром O в точке D. Докажите, что угол XDO' – прямой.

9. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках A и B. Докажите, что:

а) прямая PQ пересекает отрезок AB в его середине;

б) равны радиусы окружностей, описанных около треугольников APB и AQB;

в) окружность, описанная около одного из этих треугольников, проходит через ортоцентр другого треугольника.