

### Дополнительные построения\_1

Залогом успешного решения многих геометрических задач является умение находить дополнительные построения. На этом занятии мы займемся разными дополнительными построениями в задачах, большей частью связанных с треугольниками, но в некоторых случаях вы сможете использовать окружности и вписанные углы.

Некоторые дополнительные построения в треугольниках являются типовыми, например, медиану треугольника часто бывает полезно продлить на ее длину, а биссектрису продлить до пересечения с описанной окружностью. Если даны середины каких-то отрезков, то бывает полезно их соединить и получить среднюю линию какого-нибудь треугольника. В некоторых случаях имеет смысл отложить отрезок или угол, равный данному, в другом месте чертежа, особенно, когда в условии задачи фигурирует сумма или разность отрезков, либо углов (метод «спрямления»). Эти приёмы так или иначе уже встречались на предыдущих занятиях, в частности при решении задач на построение. Такие же методы «работают» и при решении задач на вычисление и доказательство. Иногда нужно придумать другие дополнительные построения, близкие к уже перечисленным.

### Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике  $ABC$  медиана, проведённая из вершины  $A$  к стороне  $BC$ , в четыре раза меньше стороны  $AB$  и образует с ней угол  $60^\circ$ . Найдите угол  $BAC$ .
2. Отрезки  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  являются хордами одной окружности. Точки  $M$ ,  $K$  и  $P$  – их середины соответственно. Известно, что  $\angle CKP = \alpha$ ,  $\angle PCK = \beta$ . Найдите  $\angle KMB$ .
3. В квадрате  $ABCD$  со стороной 1 точка  $F$  – середина стороны  $BC$ ,  $E$  – основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $A$  на  $DF$ . Найдите длину  $BE$ .
4. Пусть  $ABCD$  – трапеция, в которой углы  $A$  и  $B$  – прямые,  $AB = AD$ ,  $CD = BC + AD$ ,  $BC < AD$ . Докажите, что угол  $ADC$  в два раза больше угла  $ABE$ , где  $E$  – середина  $AD$ .
5. В треугольнике  $ABC$ :  $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle B = 20^\circ$ , разность сторон  $AB - BC = 4$ . Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины  $C$ .
6. На стороне  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  отмечена точка  $M$ , а на продолжении стороны  $BC$  за вершину  $C$  отмечена точка  $N$  так, что  $BM = MN$ . Докажите, что  $AM = CN$ .
7. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  – прямой. Точки  $D$  и  $E$  расположены на гипотенузе  $AB$  так, что  $BD = BC$  и  $AE = AC$ . Из точки  $D$  провели перпендикуляр  $DG$  на катет  $AC$ , а из точки  $E$  – перпендикуляр  $EF$  на катет  $BC$ . Докажите, что  $DE = EF + DG$ .
8. Угол  $BAC$  треугольника  $ABC$  равен  $120^\circ$ . На биссектрисе этого угла отмечена точка  $D$  так, что  $AD = AB + AC$ . Найдите углы треугольника  $BDC$ .
9. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = AC$ ) провели биссектрису  $BD$ . Оказалось, что  $BC = BD + AD$ . Найдите угол  $BAC$ .
10. В треугольнике  $ABC$  отмечены середины сторон  $AC$  и  $BC$  – точки  $M$  и  $N$  соответственно. Угол  $MAN$  равен  $15^\circ$ , а угол  $BAN$  равен  $45^\circ$ . Найдите угол  $ABM$ .