Серия 24. Выход в пространство

1. Даны четыре прямые общего положения, точки попарного пересечения которых обозначены через A, B, C, D, E, F. На каждой прямой отмечено по точке, каждая из которых движется вдоль этой прямой с постоянной скоростью. Известно, что для каждой из вершин A, B, C, D, E какие-то две движущиеся точки проезжают через эту вершину одновременно. Докажите, что это же справедливо и для вершины F.

2. Через центр равностороннего треугольника ABC проведена прямая ℓ, пересекающая отрезки AB и AC в точках D и E соответственно. Точка S плоскости такова, что $BE = SE$ и $CD = SD$. Докажите, что расстояние от точки S до прямой ℓ не зависит от выбора прямой ℓ.

3. Внутри треугольника ABC отмечена *точка Аполлония*; то есть такая точка X, что $XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB$. Обозначим через I_A, I_B, I_C центры вписанных окружностей треугольников XBC, XCA и XAB соответственно. Докажите, что прямые AI_A, BI_B и CI_C пересекаются в одной точке.

4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки P и Q таким образом, что $CP + CQ = AB$. Отрезки AP и AQ пересекают диагональ BD в точках X и Y. Докажите, что из отрезков BX, XY, YD можно составить треугольник, один из углов которого равен $60°$.

5. (*Смотри картинку.*) Через точки A и C проведены три дуги γ_1, γ_2, γ_3. На отрезке AC отмечена точка B, через точки B проведены три луча h_1, h_2, h_3. Докажите, что если в три из четырёх криволинейных четырёхугольников $V_{22}V_{21}V_{11}V_{12}$, $V_{22}V_{21}V_{31}V_{32}$, $V_{22}V_{23}V_{33}V_{32}$, $V_{22}V_{23}V_{13}V_{12}$ можно вписать окружность, то и в четвёртый – тоже можно.

Было бы круто инверсией выпрямить все четыре стороны криволинейных четырёхугольников. Но у их сторон нет общей точки в плоскости...