Серия 23. Полуописанная окружность

Окружность, проходящую через две вершины треугольника и касающуюся его вписанной окружности, будем называть *полуописанной*. Задача **(1)** даёт удобный способ построения такой окружности и используется в остальных задачах в качестве леммы.

1. В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается стороны BC в точке A_1. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C и касается окружности ω в точке T. Точка S — середина дуги BC окружности Ω_A, не содержащей точку T. Точка I_A — центр A-вневписанной окружности треугольника ABC.
(a) Докажите, что точки S, A_1, T коллинеарны.
(b) Докажите, что точки I_A, S, A_1 коллинеарны.[1]

2. Вписанная окружность ω касается сторон CA, AB треугольника ABC в точках B_1, C_1 соответственно. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C и касается окружности ω в точке T.
(a) Докажите, что окружность (TC_1B) проходит через A-эксцентр I_A треугольника ABC.
(b) (*в сторону*) Окружность (TC_1B) пересекает прямую BC в точках B и R. Докажите, что $CR = CB_1$.

3. Вписанная окружность ω касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C и касается окружности ω в точке T. Докажите, что окружность (TCA_1) проходит через середину отрезка A_1C_1.

4. Вписанная окружность ω касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C и касается окружности ω в точке T. Касательная к окружности ω в точке T пересекает прямую BC в точке X. Докажите, что точка X и середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 лежат на одной прямой.

5. Вписанная окружность ω касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C и касается окружности ω в точке T. Обозначим через M и N середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Докажите, что прямые BM, CN, и A_1T пересекаются в одной точке.

6. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C треугольника ABC и касается его вписанной окружности в точке T_A. Анаголично определены окружности Ω_B, Ω_C и точки T_B, T_C. Докажите, что прямые AT_A, BT_B, CT_C имеют общую точку.

7. Вписанная окружность ω касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C, касается окружности ω в точке T и пересекает отрезки AB, AC вторично в точках P и Q соответственно. Обозначим через M и N середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Прямые TM и TN второй раз пересекают окружность Ω_A в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые PX, QY, MN и AI пересекаются в одной точке.

[1] **Подсказка:** точка S — радикальный центр точек B, C и окружности ω.