Серия 19. Разнобой.

1. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через точки A_1 и B_1, в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 — в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

2. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки P и Q соответственно так, что $AC = QC = PA$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABQ и CBP пересекаются на биссектрисе угла B.

3. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Описанная окружность треугольника O_1BO_2 пересекает окружности в точках C и D, а прямую AB — в точке X. Докажите, что X является центром описанной окружности треугольника CAD.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки M и N являются проекциями B и C на AD. Окружность с диаметром MN пересекает BC в точках X и Y . Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

5. Точка M — середина основания AB равнобедренного треугольника ABC. Точка P внутри треугольника такова, что $\angle CAP = \angle ABP$. Докажите, что $\angle APM + \angle CPB = 180°$.

6. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB, в точке C_1. Докажите, что отрезок CC_1 перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности трегуольника ABC.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D плоскости такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

8. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках C_1 и B_1 соответственно; точка I_A — центр вневписанной окружности напротив вершины A. Точки C_2 и B_2 — середины отрезков I_AC_1 и I_AB_1 соответственно. Докажите, что прямые BC_2 и CB_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.