Серия 22. Теорема Дезарга об инволюции

Инволюцией называется отображение $f\colon M \to M$ из произвольного множества M в себя, при всех $x \in M$ удовлетворяющее $f(f(x)) = x$. *Проективная инволюция* — это такое отображение f из прямой/пучка прямых/коники в себя, что f — инволюция, и f сохраняет двойные отношения.

Проективная инволюция однозначно восстанавливается по трём точкам. Из этого легко вывести, что любая нетождественная инволюция коники — это проекция с коники в себя с некоторым центром.

Теорема Дезарга об инволюции. Даны четыре точки A, B, C, D общего положения и прямая ℓ, не проходящая через них. Тогда существует такая проективная инволюция $f\colon \ell \to \ell$, что если P и Q — точки пересечения прямой ℓ и произвольной кривой второго порядка, проходящей через точки A, B, C, D, то $f(P) = Q$.

Идея доказательства. Определим f так, чтобы $f(P) = Q$ для любой квадрики из условия. Очевидно, что f — инволюция, осталось доказать свойство сохранения двойных отношений.

Подействуем на картинку изогональным сопряжением относительно треугольника ABC. Тогда прямая ℓ превратится в конику ℓ^*, а пучок квадрик через точки A, B, C, D превратится в пучок прямых через изогональный образ D^* точки D. Исходное отображение f превратилось в проекцию f^* с коники ℓ^* на себя с центром в точке D^*, то есть f^* сохраняет двойные отношения. Но тогда и f тоже сохраняло двойные отношения, поскольку изогональное сопряжение проективно отображает ℓ в ℓ^*.

ТДИ для нубов. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Прямая ℓ пересекает прямые AB, CD, BC, AD, AC, BD в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно и пересекает окружность Ω в точках T и T'. Тогда существует инволюция $f\colon \ell \to \ell$, меняющая местами пары точек $X \leftrightarrow X'$, $Y \leftrightarrow Y'$, $Z \leftrightarrow Z'$, $T \leftrightarrow T'$.

Нарисуйте картинки ТДИ для нубов в случаях, когда одна или две пары точек из A, B, C, D склеились.

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямая ℓ пересекает прямые AB, CD, BC, DA, AC, BD в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно. Известно, что на прямой ℓ эти шесть точек лежат в порядке $X - Y - Z - X' - Y' - Z'$. Докажите, что три окружности, построенные на отрезках XX', YY', ZZ' как на диаметрах, имеют две общие точки.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Окружность ω касается прямых AB и CD в точках X и Y и пересекает дугу AD окружности Ω в точках K и L. Прямая XY пересекает AC и BD в точках Z и T. **(a)** Докажите, что точки K, L, Z и T лежат на одной окружности; **(b)** Докажите, что эта окружность касается прямых AC и BD.

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечены ортоцентр H и середина M_A стороны BC. Лучи AM_A и M_AH пересекают окружность (ABC) в точках X_A и Y_A соответственно. Аналогично определены точки X_B, X_C, Y_B, Y_C. Докажите, что прямые X_AY_A, X_BY_B, X_CY_C пересекаются в одной точке, лежащей на прямой Эйлера треугольника ABC.

ТДИ, двойственная. Даны четыре прямые a, b, c, d общего положения и точка L, не лежащая на них. Обозначим через (L) пучок прямые через точку L. Тогда существует такая проективная инволюция $f\colon (L) \to (L)$, что если p и q — касательные из L к произвольной кривой второго порядка, касающейся прямых a, b, c, d, то $f(p) = q$.

ТДИ для нубов, двойственная. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности ω. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые BC и DA — в точке Q. Вне окружности ω и не на прямых AB, BC, CD, DA выбрана точка X. Тогда существует проективная инволюция $f\colon (X) \to (X)$, меняющая местами пары прямых $XA \leftrightarrow XC$, $XB \leftrightarrow XD$, $XP \leftrightarrow XQ$ и касательные из X к окружности ω.

Нарисуйте ТДИ для нубов, если одна/две пары точек касания сторон четырёхугольника с окружностью склеились.

4. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке I. Вне четырёхугольника взята точка S так, что никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой и $\angle ISB = \angle ISD$. Докажите, что $\angle ISA = \angle ISC$.

5. На меньших дугах BC, CA, AB описанной окружности остроугольного треугольника ABC взяты точки D, E, F соответственно. Оказалось, что вписанная окружность ω треугольника ABC касается отрезков EF, FD, DE. Обозначим точки касания окружности ω с отрезками BC и EF через K и L соответственно. Прямые AL и DK вторично пересекают окружность (ABC) в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые BC, EF, DX, AY пересекаются в одной точке либо параллельны.

6. На меньшей дуге BC описанной окружности треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Касательные из точки M к вписанной окружности треугольника ABC пересекают прямую BC в точках X и Y. Докажите, что окружность (MXY) проходит через точку T_A касания A-полувписанной окружности с окружностью (ABC).

7. Общие касательные к описанной и A-вневписанной окружностям треугольника ABC пересекают прямую BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle XAB = \angle CAY$.