Серия 21. Вокруг описанного четырехугольника.

Рассмотрим описанный четырехугольник $ABCD$, вписанная окружность с центром в точке I радиуса R которого касается сторон AB, BC, CD и DA в точках X, Y, Z и T соответственно.

Обозначим через a, b, c, d отрезки касательных из точек A, B, C, D соответственно.

1. Предположим, что прямые AC и XZ пересекаются в точке P. Докажите, что $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{a}{c}$. Выведите из этого соотношения *теорему Брианшона для четырёхугольника:* прямые AC, BD, XZ, YT пересекаются в одной точке.

2. Перпендикуляры в точке A к прямым AB и AD пересекаются прямые BI и DI в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN \perp AC$.

3. Докажите, что $AB = \dfrac{YT}{2} \cdot \dfrac{IA \cdot IB}{R^2}$.

4. Докажите, что $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{IA \cdot IB}{IC \cdot ID}$, и $\dfrac{BC}{DA} = \dfrac{IB \cdot IC}{ID \cdot IA}$.

5. Докажите, что $IA \cdot IC + IB \cdot ID = \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}$. [1]

6. Докажите, что $IA \cdot IC = \dfrac{(a+c) \cdot R}{\sin \frac{\angle A + \angle C}{2}}$.

7. Докажите, что $S_{ABCD} = \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA} \cdot \sin \frac{\angle A + \angle C}{2}$.

8. Докажите, что
$$\frac{S_{APB}}{ab} = \frac{S_{BPC}}{bc} = \frac{S_{CPD}}{cd} = \frac{S_{DPA}}{da}.$$

9. Докажите, что
$$\frac{1}{\mathrm{dist}(P, AB)} + \frac{1}{\mathrm{dist}(P, CD)} = \frac{1}{\mathrm{dist}(P, BC)} + \frac{1}{\mathrm{dist}(P, DA)}.$$

10. Let H_X, H_Y, H_Z, H_T be the orthocenters of triangles AIB, BIC, CID, DIA. Prove that points P, H_X, H_Y, H_Z, H_T are collinear.

[1] **Подсказка:** рассмотрите точки X' и Z', диаметрально противоположные точкам X и Z на вписанной окружности, и запишите теорему Птолемея для четырёхугольника $X'TZ'Y$.