Серия 20. Лемма о пропорциональных проекциях

Для вектора $\vec{u}$ и направленной прямой ℓ обозначим через u_ℓ ориентированную длину проекции вектора $\vec{u}$ на прямую ℓ. Иными словами, если $\vec{e}$ — единичный вектор прямой ℓ, сонаправленный с ней, то $u_\ell := (\vec{u}, \vec{e})$ ($\leftarrow$ это скалярное произведение).

Лемма. На плоскости даны две непараллельные направленные прямые k и ℓ, а также два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Тогда векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны, если и только если $u_k/u_\ell = v_k/v_\ell$.

Идея доказательства. Отложим векторы $\bar{u}$ и $\bar{v}$ от точки A пересечения прямых k и ℓ и подействуем на вектор $\bar{u}$ гомотетией с коэффициентом v_k/u_k с центром в точке A.

1. Точки K и L — проекции середины M стороны BC остроугольного треугольника ABC на стороны AB и AC соответственно. Окружности (ABL) и (ACK) пересекаются в точках A и S. Докажите, что $AS \perp BC$.

2. Закончите формулировку утверждения и докажите его: «вектор $\vec{u}$ перпендикулярен стороне BC треугольника ABC, если и только если $u_{AB}/u_{AC} = \ldots$».

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Точки O и I_A — центры описанной и A-вневписанной окружностей. Докажите, что $B_1C_1 \perp OI_A$.

4. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность с центром I касается его стороны BC в точке K. На сторонах AB, AC отмечены точки P и Q соответственно, что $AP = CK$, $AQ = BK$; AD — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $PQ \perp DI$.

5. (*Немного в сторону*) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Касательные к его описанной окружности, восстановленные в вершинах B и C, пересекаются в точке S. На продолжениях сторон AB и DC за точки B и C отмечены такие точки X и Y соответственно, что $\angle BXS = \angle SYC = \angle ABD$. Докажите, что четырёхугольник $AXYD$ — вписанный.

6. Дан треугольник ABC. Прямая, соединяющая точки касания B-вневписанной окружности с прямыми AC и BC, пересекает сторону AB в точке X. Прямая, соединяющая точки касания C-вневписанной окружности с прямыми AB и BC, пересекает сторону AC в точке Y. Докажите, что $XY \perp I_AH$, где точки H и I_A — ортоцентр и A-эксцентр треугольника ABC.

7. Окружность ξ касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках D и E соответственно, причём $BD + CE < BC$. На стороне BC отмечены точки F и G так, что $BD = BF$, $CE = CG$. Прямые DG и FE пересекаются в точке K. На малой дуге DE окружности ξ отмечена точка L, касательная в которой к окружности ξ параллельна прямой BC. Докажите, что инцентр треугольника ABC лежит на прямой KL.

8. (*EGMO-2014*) Let D and E be points in the interiors of sides AB and AC, respectively, of a triangle ABC, such that $DB = BC = CE$. Let the lines CD and BE meet at F. Prove that the incentre I of triangle ABC, the orthocentre H of triangle DEF and the midpoint M of the arc BAC of the circumcircle of triangle ABC are collinear.