Серия 18. Движение точек, скрытые коники и лемма Соллертинского

Для каждой точки T обозначим через (T) пучок прямых, проходящих через точку T.

Лемма Соллертинского. На плоскости даны точки X и Y. Предположим, что прямые $\ell_X(t) \in (X)$ и $\ell_Y(t) \in (Y)$ вращаются с сохранением двойных отношений вокруг точек X и Y соответственно ($t \in \mathbb{R}P$). Тогда точка пересечения прямых $\ell_X(t)$ и $\ell_Y(t)$ движется с сохранением двойных отношений либо по некоторой конике, проходящей через точки X и Y, либо по прямой (прямая получается в случае, когда $\ell_X(t)$ и $\ell_Y(t)$ проезжают прямую XY одновременно).

Двойственная лемма. Предположим, что точки X_t и Y_t движутся по разным прямым ℓ_X и ℓ_Y соответственно с сохранением двойных отношений ($t \in \mathbb{R}P$). Тогда прямая X_tY_t либо касается некоторой коники, вписанной в угол между прямыми ℓ_X и ℓ_Y, либо проходит через постоянную точку (постоянная точка возникает в случае, когда точки X_t и Y_t одновременно проезжают точку пересечения своих траекторий). При этом точка касания прямой X_tY_t и коники едет по этой конике с сохранением двойных отношений.

1. Докажите, что изогональный образ прямой, не проходящей через вершины треугольника — это коника, проходящая через вершины. Изогональным образом какой прямой будет описанная окружность треугольника?

2. На сторонах AB, AC остроугольного неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно так, что четырёхугольник $BXYC$ — вписанный. Отрезки BY и CX пересекаются в точке R. Точка A' плоскости такова, что отрезок AA' — диаметр окружности (ABC). Прямая $A'R$ пересекает окружность (ABC) в точках A' и M. **(a)** Докажите, что прямые AM и XY пересекаются на прямой BC. **(b)** Докажите, что ось ортоцентров треугольников ABC и AXY проходит через точку R.

3. Окружность ϑ с центром в точке O касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая, параллельная прямой BC, проходит через точку O и пересекает прямые AB и AC в точках D и E соответственно. На отрезке BC отмечена произвольная точка X. Прямые DX и AC пересекаются в точке Y. Прямая, параллельная прямой AC, проходит через точку X и пересекает прямую AB в точке Z. Докажите, что прямая YZ касается окружности ϑ.

4. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 провели отрезки общих касательных: A_1A_2 (внешняя) и B_1B_2 (внутренняя) ($A_1, B_1 \in \omega_1, A_2, B_2 \in \omega_2$). Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения пар прямых A_1A_2, B_1B_2 и A_1B_2, A_2B_1, ортогональна линии центров ω_1 и ω_2.

5. На плоскости даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. На плоскости нашлась такая точка S, что
$$AS \perp B'C', \quad BS \perp C'A', \quad CS \perp A'B', \quad A'S \perp BC, \quad B'S \perp CA, \quad C'S \perp AB.$$
Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке или параллельны.
Иными словами, если два треугольника ортологичны и центры ортологии совпадают, то они перспективны.

6. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R. Обозначим через C_1, D_1, M середины отрезков RC, RD, CD соответственно. Прямые AD_1 и BC_1 пересекаются в точке X. Прямая XM пересекает прямые AC и BD в точках U и V. Докажите, что прямая RX касается окружности (RUV).

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечены изогонально сопряжённые точки P и Q. Точка W — середина дуги BAC окружности (ABC). Прямые WP и WQ второй раз пересекают окружность (ABC) в точках X и Y соответственно. Через точки P и Q проведены прямые, параллельные прямой AW; этим прямые пересекают стороны AB, AC в точках P_B, P_C, Q_B, Q_C. Докажите, что точки X, Y, P_B, P_C, Q_B, Q_C лежат на одной окружности.