Серия 17. Лемма об изогоналях

Лемма. Пусть OA_1, OA_2 и OB_1, OB_2 – пары изогоналей внутри некоторого угла с вершиной O. X — пересечение A_1B_1 и A_2B_2, Y — пересечение A_1B_2 и A_2B_1. Тогда OX и OY изогональны внутри того же угла.

1. В треугольнике ABC. Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 — высота треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA', на которой отмечена точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B', а прямая CX пересекает AB в точке C'. Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P, а отрезки $A'C'$ и BB' — в точке Q. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

3. На сторонах и AC остроугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте AA_1 треугольника ABC.

4. Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а ее диагонали — в точке Q. На меньшем основании BC отмечена точка M так, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.

5. Вершины B и C треугольника ABC спроецировали на биссектрису внешнего угла A, получили точки B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямые BC_1 и CB_1 пересекаются на внутренней биссектрисе угла A.

6. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки I и K — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ACD соответственно, а J и L — центры их вневписанных окружностей касающихся сторон BC и CD соответственно. Докажите, что прямые IL и JK пересекаются на биссектрисе угла BCD.

8. К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C. Лучи CC_1 и BB_1, где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

9. Внутри треугольника ABC отмечены точки X, Y, Z такие, что $\angle CBX = \angle ZBA$, $\angle BAZ = \angle YAC$, $\angle ACY = \angle XCB$. Докажите, что прямые AX, BY и CZ пересекаются в одной точке.

10. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Точка K является проекцией точки D на прямую EF. Точка H — ортоцентр треугольник ABC, точка A' диаметрально противоположна A в описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что DK — биссектриса угла HKA'.