Серия 16. Изогональные шестёрки

Шестёрка $(A, C; B, D; P, Q)$ точек плоскости общего положения называется *изогональной*, если справедливы шесть равенств углов:

$$\overline{AB} + \overline{AD} \equiv \overline{AP} + \overline{AQ}, \quad \overline{BA} + \overline{BC} \equiv \overline{BP} + \overline{BQ}, \quad \overline{PA} + \overline{PC} \equiv \overline{PB} + \overline{PD},$$
$$\overline{CB} + \overline{CD} \equiv \overline{CP} + \overline{CQ}, \quad \overline{DA} + \overline{DC} \equiv \overline{DP} + \overline{DQ}, \quad \overline{QA} + \overline{QC} \equiv \overline{QB} + \overline{QD}.$$

Здесь «$\overline{\ell_1} + \overline{\ell_2} \equiv \overline{\ell_3} + \overline{\ell_4}$» означает $\measuredangle(\ell_1, \ell_3) \equiv \measuredangle(\ell_4, \ell_2)$.

Теорема. Из любых трёх приведённых равенств углов следуют все шесть.

1. (*Задача 11.8 финала всероса-2017, страшно?*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A, I_B, I_C, I_D центры окружностей, вписанных в треугольники DAB, ABC, BCD, CDA соответственно. Докажите, что если $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180°$, то $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180°$.

2. Внутри угла величиной α выбрана точка A. По сторонам угла ползают муравьи X и Y так, что $\angle XAY = const_1 < 180° - \alpha$. Докажите, что внутри угла найдется помимо точки A еще одна точка B такая, что $\angle XBY = const_2$.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Отображение f сопоставляет каждой точке X плоскости вторую точку $f(X)$ пересечения окружностей (ABX) и (CDX). Отображение g сопоставляет каждой точке X плоскости вторую точку $g(X)$ пересечения окружностей (BCX) и (DAX).
(a) Докажите, что $f \circ g = g \circ f$.
(b) Докажите, что если у точки X существовал изогональный образ X^* относительно четырёхугольника $ABCD$, то $f(g(X)) = X^*$.

4. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка X. Центры окружностей (ABX), (BCX), (CDX), (DAX) обозначим через O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно. Докажите, что угол между прямыми O_1O_3 и O_2O_4 не зависит от выбора точки X.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка X. Докажите, что если радиусы окружностей (AXB) и (CXD) равны R, а линия центров этих окружностей не проходит через центр параллелограмма, то радиусы окружностей (BXC) и (DXA) также равны R.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечены ортоцентр H и центр O описанной окружности. Точка P — отражение вершины A относительно прямой OH. Известно, что точки A и P лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC. На сторонах AB, AC нашлись такие точки E, F соответственно, что $BE = PC$, $CF = PB$. Прямые AP и OH пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle EKF = 90°$.

7. Точки A, B, C, D, P, Q, X, Y находятся в общем положении. Докажите, что если $(A, C; B, D; P, Q)$ и $(A, C; B, D; X, Y)$ — изогональные шестёрки, то $(P, Q; X, Y; A, C)$ и $(P, Q; X, Y; B, D)$ — тоже изогональные шестёрки.